MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Tehtävät alkuviikolle 39
Ratkaisuehdotukset (Janne Leppä-aho)

Alkuviikon tehtävät

O.1 Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}?$$

Ratkaisu: Tutkitaan lauseketta $n/(2n+1)$. Huomataan ensin, että

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{n}{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2+\dfrac{1}{n}}.$$

Kun n kasvaa rajatta, niin osamäärä näyttäisi lähestyvän lukua $1/2$. Eli tehtävän väite pätee. Osoitetaan tämä lukujonon raja-arvon määritelmän avulla. Merkitään $x_n = n/(2n+1)$. Meidän on siis löydettävä kaikille reaaliluvuille $\epsilon > 0$, luonnollinen luku K siten, että $|x_n - 1/2| < \epsilon$, kun $n > K$. Lähdetään siis tutkimaan erotuksen itseisarvoa $|x_n - 1/2|$. Saadaan

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n}{2(2n+1)} - \frac{2n+1}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{2n-2n-1}{4n+2}\right| = \left|\frac{-1}{4n+2}\right|.$$

Itseisarvomerkit voidaan poistaa, sillä $n \geq 1$, joten nimittäjä on positiivinen. Saadaan arvio

$$\left|\frac{-1}{4n+2}\right| = \frac{1}{4n+2} \leq \frac{1}{n}.$$

Nyt halutaan, että $1/n < \epsilon$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $n > 1/\epsilon$. Siis jos valitsemme $K > 1/\epsilon$, niin pätee $|x_n - 1/2| < \epsilon$. Kootaan edellä olevat havainnot todistukseksi.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $K > 1/\epsilon$. Kun $n > K$, niin saadaan

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \frac{1}{\dfrac{1}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Tämä tarkoittaa, että $x_n \to 1/2$, kun $n \to \infty$.

O2. Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{3}{2}?$$

Ratkaisu: Tutkittava lukujono on sama kuin edellisessä tehtävässä. Osoitimme, että kyseisen lukujonon raja-arvo on $1/2$, joten lukujonon raja-arvon yksikäsitteisyyden perusteella se ei voi olla $3/2$. Meidän pitää kuitenkin näyttää tämä todeksi määritelmän avulla.

Merkitään $x_n = n/(2n+1)$. Tutkitaan lauseketta $|x_n - 3/2|$. Nyt tavoite on arvioida tämä erotus alaspäin vakioksi.

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2n}{2(2n+1)} - \frac{3(2n+1}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{2n-6n-3}{4n+2}\right| = \left|\frac{-4n-3}{4n+2}\right|$$

Huomataan, että osoittaja on aina negatiivinen ja nimittäjä positiivinen, koska $n \geq 1$. Siispä

$$\left|\frac{-4n-3}{4n+2}\right| = \frac{4n+3}{4n+2} \geq \frac{4n+2}{4n+2} = 1.$$

Olkoon nyt $\epsilon = 1/2$. Nyt ei ole mahdollista löytää luonnollista lukua K siten, että $|x_n - 3/2| < \epsilon$, kun $n > K$, sillä aikasemman päättelymme perusteella tiedämme, että $|x_n - 3/2| \geq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

K1. Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-3} = \frac{3}{2}?$$

Ratkaisu: Huomataan ensin, että

$$\frac{3n+1}{2n-3} = \frac{n\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(2-\dfrac{3}{n}\right)} = \frac{\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(2-\dfrac{3}{n}\right)} \to \frac{3}{2},$$

kun $n \to \infty$. Tehtävän väite siis pätee. Osoitetaan tämä määritelmän perusteella. Merkitään $x_n = (3n+1)/(2n-3)$. Arvioidaan lauseke $|x_n - 3/2|$

ylöspäin yksinkertaisempaan muotoon ja päätellään tämän avulla, kuinka K tulisi valita.

$$\left|\frac{3n+1}{2n-3}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2(3n+1)}{2(2n-3)}-\frac{3(2n-3}{2(2n-3}\right| = \left|\frac{6n+2-6n+9}{4n-6}\right| = \left|\frac{11}{4n-6}\right|$$

Oletetaan seuraavaksi, että $n \geq 2$, sillä tällöin $4n-6 \geq 0$. Nyt

$$\left|\frac{11}{4n-6}\right| = \frac{11}{4n-6}.$$

Kun $n \geq 2$ pätee myös arvio $4n-6 \geq n$, jonka avulla voimme arvioida osamäärää ylöspäin, eli

$$\frac{11}{4n-6} \leq \frac{11}{n}.$$

Haluamme, että $11/n < \epsilon$, kun $\epsilon > 0$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $n > 11/\epsilon$. Nyt tiedämme, että valitsemalla K suuremaksi kuin maksimi luvuista 2 tai $11/\epsilon$, niin $|x_n - 3/2|$ saadaan pienemmäksi kuin ϵ. Kootaan edellä oleva todistukseksi.

Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $K > \max\{11/\epsilon, 2\}$. Nyt, jos $n > K$, niin

$$\left|\frac{3n+1}{2n-3}-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{11}{n} < \frac{11}{K} < \frac{11}{\frac{11}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-3} = \frac{3}{2}.$$

K2. Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-3} = \frac{2}{3}?$$

Ratkaisu: Edellisen tehtävän ja lukujonon raja-arvon yksikäsitteisyyden perusteella väite ei päde. Osoitetaan tämä määritelmän avulla. Merkitään $x_n = (3n+1)/(2n-3)$. Arvioidaan lauseketta $|x_n - 2/3|$ alaspäin.

$$\left|\frac{3n+1}{2n-3}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3(3n+1)}{3(2n-3)}-\frac{2(2n-3)}{3(2n-3)}\right| = \left|\frac{9n+3-4n+6}{6n-9}\right| = \left|\frac{5n+9}{6n-9}\right|$$

Oletetaan, että $n \geq 2$. Tällöin

$$\left|\frac{5n+9}{6n-9}\right| = \frac{5n+9}{6n-9} \geq \frac{5n}{6n} = \frac{5}{6}$$

Valitaan $\epsilon = 1/6$. Nyt kaikilla $n \geq 2$ pätee

$$\left|\frac{3n+1}{2n-3} - \frac{2}{3}\right| \geq \frac{5}{6} \not< \epsilon.$$

Lukujonon raja-arvon määritelmä ei siis toteudu, koska valitulle luvulle $\epsilon = 1/6$ ei voida löytää lukua K, niin että $|x_n - 2/3| < 1/6$, kun $n > K$.

K3. Onko olemassa

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + \frac{3}{4n}}?$$

Tehtävässä ei saa vedota neliöjuurifunktion jatkuvuuteen tms. Koulussa käytetystä neliöjuurten erotuksen lavennustempusta on hyötyä.

Ratkaisu: Näyttää siltä, että $\sqrt{2+3/4n}$ lähestyy lukua $\sqrt{2}$, kun n kasvaa rajatta. Osoitetaan tämä. Merkitään $x_n = \sqrt{2+3/4n}$. Lähdetään arvioimaan lauseketta $|x_n - \sqrt{2}|$ ylöspäin.

$$\left|\sqrt{2+\frac{3}{4n}} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{2+\frac{3}{4n}} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\frac{3}{4n}} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2+\frac{3}{4n}} + \sqrt{2}\right)}\right| = \left|\frac{2+\frac{3}{4n}-2}{\sqrt{2+\frac{3}{4n}} + \sqrt{2}}\right|$$

Osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia ja $\sqrt{2+3/4n}+\sqrt{2} \geq 1$, joten saadaan arvio

$$\frac{\frac{3}{4n}}{\sqrt{2+\frac{3}{4n}}+\sqrt{2}} \leq \frac{\frac{3}{4n}}{1} = \frac{3}{4n} \leq \frac{3}{n}.$$

Haluamme, että $3/n < \epsilon$, kun $\epsilon > 0$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $n > 3/\epsilon$. Siis jos valitsemme $K > 3/\epsilon$, niin pätee $|x_n - \sqrt{2}| < \epsilon$. Kootaan edellä olevat havainnot todistukseksi.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $K > 3/\epsilon$. Tällöin kaikilla $n > K$ pätee

$$\left|\sqrt{2+\frac{3}{4n}} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{3}{n} < \frac{3}{K} < \frac{3}{3/\epsilon} = \epsilon.$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + \frac{3}{4n}} = \sqrt{2}.$$