Analyysi I
Tehtävät viikolle 37 (alkuviikko)
Esimerkkiratkaisuja

O1. Jos olisi sellainen yksikäsitteinen luku y, että $0y = 1$, pätisi myös, että

$$1 = 0y = (1-1)y = y - y = 0,$$

mikä on selvästi ristiriita, sillä reaalilukujen aksioomien mukaan $0 \neq 1$. Näin ollen tällaista lukua y ei ole olemassa. Nollalla jakamista ei siis voida yksikäsitteisesti määritellä.

O2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Arvioidaan epäyhtälön vasenta puolta:

$$\frac{n+1}{n^2+2} \leq \frac{n+1}{n^2} \overset{*}{\leq} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

Ylläoleva osoittaa väitteen todeksi.
Arvio * perustui siihen, että $n \geq 1$, joten $n+1 \leq 2n$.

K1. a) Tehdään vastaoletus, että $\sqrt[3]{2}$ on rationaalinen. Tällöin $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ ja luvuilla m ja n ei ole yhtään yhteistä tekijää. Korottamalla yhtälö molemmin puolin kolmanteen potenssiin saadaan $2 = \frac{m^3}{n^3} \Leftrightarrow 2n^3 = m^3$
Koska yhtälön vasen puoli on parillinen, tulee myös oikean puolen olla parillinen. Näin ollen m^3 on parillinen, ~~joten~~ joten myös m on parillinen. Siis $m = 2k$ jollain $k \in \mathbb{Z}$. Sijoittamalla tämä yhtälöön saadaan $2n^3 = 2^3k^3 \Leftrightarrow n^3 = 2 \cdot 2k^3$.
Samoin nyt luku n^3 on parillinen, joten myös n parillinen. Nyt kuitenkin luvuilla m ja n on yhteinen tekijä, luku 2. Päädyttiin ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä. Siis $\sqrt[3]{2}$ on irrationaalinen.

b) Tehdään vastaoletus, että $\sqrt{6}$ on rationaalinen.
Tällöin $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ ja luvuilla m ja n ei ole yhteisiä tekijöitä.
Nyt erityisesti

$$6 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow 6n^2 = m^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3n^2 = m^2$$

Yhtälön vasemmalla puolella on tekijät 2 ja 3, samat tekijät on oltava myös oikealla puolella. Siis luku m^2 on jaollinen luvuilla 2 ja 3. Tällöin myös luku m on jaollinen luvuilla 2 ja 3. Niinpä m on jaollinen luvulla 6, siis muotoa $m = 6k$, $k \in \mathbb{Z}$. Sijoittamalla viimeisimpään yhtälöön saadaan

$$6n^2 = 6^2k^2$$

$$\Leftrightarrow n^2 = 6k^2$$

Nyt vastaavasti on oltava, että $n = 6l$, jollain $l \in \mathbb{Z}$

Nyt kuitenkin sekä m että n ovat jaollisia luvulla kuusi, mikä on ristiriita vastaoletuksen kanssa.
Siis $\sqrt{6}$ on irrationaalinen.

K2. Oletetaan, että $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ on rationaalinen, siis $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{m}{n}$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Korottamalla yhtälö puolittain neliöön, saadaan

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} = \frac{m^2}{n^2},$$

missä $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$, sillä $(\sqrt{2}\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2(\sqrt{3})^2 = 6$ ja $\sqrt{2}\sqrt{3} > 0$ järjestysaksiooman (4) nojalla.
Ratkaisemalla yhtälöstä $\sqrt{6}$ saadaan $\sqrt{6} = \frac{m^2 - 5n^2}{2n^2}$, toisin sanoen $\sqrt{6}$ on rationaaliluku, sillä $m^2 - 5n^2$, $2n^2 \in \mathbb{Z}$.
Edellisessä tehtävässä kuitenkin osoitettiin, että $\sqrt{6}$ on irrationaaliluku, joten päädyttiin ristiriitaan.
Niinpä $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ on irrationaalinen.

(K3.) Oletetaan, että $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ on rationaalinen. Siis
$\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.
Nyt on $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n} - \sqrt{2}$. Korottamalla yhtälö puolittain kolmanteen potenssiin saadaan

$2 = (\frac{m}{n} - \sqrt{2})^3$. Siis

$$2 = \frac{m^3}{n^3} - 3\sqrt{2}\frac{m^2}{n^2} + 6\frac{m}{n} - 2\sqrt{2}, \text{ josta}$$

$$\sqrt{2} = \frac{2n^3 - m^3 - 6mn^2}{-3m^2n - 2n^3}$$

Siis $\sqrt{2}$ on rationaaliluku. Tiedetään kuitenkin, että $\sqrt{2}$ on irrationaalinen. Päädyttiin ristiriitaan, joten luku $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ on irrationaalinen.