Vk 37 ratkaisuehdotukset

03. Oletetaan tunnetuksi, että $\sqrt{3}$ on irrationaalinen Onko $\frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+5}$ rationaalinen vai irrationaalinen

Ratk. reaaliluku on rationaalinen jos se voidaan esittää muodossa m/n, missä $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $n \neq 0$
Oletetaan, että $\sqrt{3}+4/\sqrt{3}+5$ on rationaalinen, eli $\sqrt{3}+4/\sqrt{3}+5 = m/n$ jossa m ja n kuten yllä. Kerrotaan ristiin ja muokataan yhtälöä

$$\frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+5} = \frac{m}{n} \quad *(m \neq n, \text{ koska } \sqrt{3}+4/\sqrt{3}+5 \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow n(\sqrt{3}+4) = m(\sqrt{3}+5)$$
$$\Leftrightarrow n\sqrt{3} + 4n = m\sqrt{3} + 5m$$
$$\Leftrightarrow (n-m)\sqrt{3} = 5m - 4n$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{5m-4n}{n-m} \; *$$

nyt $\sqrt{3}$ on rationaalinen. Oletuksen nojalla $\sqrt{3}$ on irrationaalinen. Seuraa ristiriita. Siis $\sqrt{3}+4/\sqrt{3}+5$ ei voi olla rationaalinen ja on siten irrationaalinen.

04. a) Oletetaan, että $0 < x < y$ Osoita $x^2 < y^2$

Ratk. $x^2 < y^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 > 0$
$y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$
$y - x > 0 \Leftrightarrow y > x$ (oletus)
$y + x > 0$, koska oletus! $0 < x < y$
jos $a > 0$ ja $b > 0$, niin $ab > 0$
siis $(y-x)(y+x) > 0$ ja erityisesti $y^2 - x^2 > 0$
siis $x^2 < y^2$

O4.b) Oletetaan $1<x$ päteekö $x^3<x^7$

Ratk. jos $1<x$, niin erityisesti $x>0$
jos $x<y$ ja $z>0$, niin $xz<xy$
kertomalla epäyhtälöä $1<x$ puolittain x:llä
saadaan $x<x^2$, ja edelleen:
$x^2<x^3$, $x^3<x^4$, $x^4<x^5$, $x^5<x^6$, $x^6<x^7$
siis $x^3<x^7$

K4. Oletetaan $n\in\mathbb{Z}_+$ Osoita $\frac{3n+1}{2n+5}<2$

Ratk. $\frac{3n+1}{2n+5}<\frac{3n+1}{2n}\leq\frac{3n+n}{2n}=\frac{4n}{2n}=2$
siis $\frac{3n+1}{2n+5}<2$

K5. Oletetaan $n\in\mathbb{Z}$ Osoita $\frac{3n+1}{2n+5}>\frac{1}{3}$

Ratk. $\frac{3n+1}{2n+5}>\frac{3n}{2n+5}\geq\frac{3n}{2n+5n}=\frac{3n}{7n}=\frac{3}{7}>\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$
siis $\frac{3n+1}{2n+5}>\frac{1}{3}$

K6. Oletetaan $n>10^{100}$ Osoita $2<\frac{2n+5}{n+2}<2+10^{-100}$

Ratk. $2<\frac{2n+5}{n+2}\overset{\text{mol puol} \,:2}{\Longleftrightarrow}1<\frac{2n+5}{2n+4}$ tämä on tosi, sillä $2n+5>2n+4$
siis vasen epäyhtälö on tosi.
Tutkitaan seuraavaksi erotusta:
$\frac{2n+5}{n+2}-2=\frac{2n+5}{n+2}-\frac{2n+4}{n+2}=\frac{2n+5-(2n+4)}{n+2}$
$=\frac{1}{n+2}<\frac{1}{10^{100}+2}<\frac{1}{10^{100}}=10^{-100}$

eli $\frac{2n+5}{n+2}-2<10^{-100}\Longleftrightarrow\frac{2n+5}{n+2}<2+10^{-100}$
siis myös oikea epäyhtälö on tosi

$\Rightarrow 2<\frac{2n+5}{n+2}<2+10^{-100}$ on tosi