

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Harjoituskoe ensimmäistä kurssikoetta varten

Tässä viime syksyn ensimmäisen kurssikokeen tehtävät. Koe on rakennettu niin, että yhden tehtävän on tarkoitus olla todella suoraviivainen; yksi asiaa, jota on tosi paljon harjoiteltu; yksi uutuuttaan vaativampaa asiaa; ja sitten yksi asioiden syvällisempää osaamista haastava. Ykköstehtävässä kannattaa muistaa lauseen 4.7. ”osista kokonaisuuksiin” etenevä rakenne. Nelostehtävä on tässä tosi vaativa, mutta sitäkin kannattaa yrittää rauhassa miettiä.

1. Selvitä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n+2} + \frac{n+2}{2n+1} \right).$$

Tehtävässä saa käyttää kurssin lauseita sekä tietoja vakiojonon ja jonon $(\frac{1}{n})$ raja-arvoista. Huolellinen perustelu!

2. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 1}{n^2 + 7} = 7.$$

3. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 1) = 1.$$

4. Oletetaan, että A ja B ovat epätyhjiä ja ylhäältä rajoitettuja reaalilukujoukkoja. Merkitään $a = \sup A$ ja $b = \sup B$. Osoita, että

$$a + b = \sup\{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}.$$