* * * * *

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1

Luentomuistiinpanot - Ritva Hurri-Syrjänen

Helsingin yliopisto, matematiikan laitos

Syksy 1999

Sisällysluettelo:

Luennoin syyslukukaudella 1999 kurssin Differentiaali -ja integraalilaskenta I.1. Luentoja valmistaessani olen seurannut lähinnä Jussi Väisälän luentoja ja Lauri Myrbergin kirjaa (Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 1, Kirjayhtymä) sekä joissain kohdin Raimo Näkin luentoja. Jussi Jokelainen ja Rakel Kaila avustivat luentojen puhtaaksikirjoittamisessa.

Ritva Hurri-Syrjänen

DIFFERENTIAALI- JA INTEGRAALILASKENTA I.1

Ritva Hurri-Syrjänen/Syksy 1999/Luennot

1. ALUKSI

Joukko-oppia

Lyhenteitä ja merkintöjä.

$A \Longrightarrow B$ A:sta seuraa B. Implikaatio.
$A \Longleftrightarrow B$ A ja B yhtäpitävät. Ekvivalenssi.
$\exists$ on olemassa.
$\exists_1$ on olemassa yksi ja vain yksi.
$\nexists$ ei ole olemassa.
$\forall$ kaikilla.
RR ristiriita.
s.e. siten, että (sellainen, että).
joss jos ja vain jos.
Ystö ympäristö.
Olk. Olkoon.
Lemma Apulause.
Korollaari Seurauslause.
Antiteesi Vastaväite.

Joukot. Esimerkkejä joukoista:

(1) Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$
(2) Positiivisten kokonaislukujen joukko $\mathbb{N}$. Alkiot: $1, 2, 3, \ldots$
(3) Ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko $\mathbb{N}_0$. Alkiot: $0, 1, 2, \ldots$
(4) Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$
(5) Suljettu väli $[0, 100]$
(6) Avoin väli $(0, 1000)$, tai joskus myös $]0, 1000[$
(7) Jatkuvien funktioiden $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko
(8) Ensimmäisen vuoden matematiikan opiskelijat
(9) Ensimmäisen vuoden matematiikan opiskelijoiden opettajat

Määritelmä. Joukko on hyvin määritelty kokoelma olioita (objekteja), joita sanotaan alkioiksi.

Joukko on annettu, kun tunnetaan sen alkiot, toisin sanoen, jokaisesta oliosta tiedetään, kuuluuko se joukkoon vai ei.

Joukot A ja B ovat samat eli $A = B$, jos niissä on täsmälleen samat alkiot.

Tyhjä joukko, $\emptyset$, on joukko, jossa ei ole yhtään alkiota.

Merkintöjä. $x \in A$, x on joukon A alkio eli x kuuluu joukkoon A.

$x \notin A$, x ei kuulu joukkoon A.

$A \subset B$, (myös merkintä $A \subseteq B$) joukko A on joukon B osajoukko eli A sisältyy joukkoon B eli $\forall x \in A$ pätee, että

$$x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

$A \supset B$ tarkoittaa, että $B \subset A$.

$A \nsubseteq B$ tarkoittaa, että ei päde $A \subseteq B$.

Esimerkki. $6 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Huom. $6 \in \mathbb{Z}$ ja $\{6\} \subset \mathbb{Z}$.

Huomautuksia.

(1) $A \subset B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.
(2) $\emptyset \subset A$ jokaisella joukolla A.
(3) $x \notin \emptyset$ kaikilla olioilla x.
(4) Sanonta: $A \neq \emptyset$, joukko A on epätyhjä.
(5) $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$ joukon A potenssijoukko, toisin sanoen, joukon A osajoukkojen muodostama joukko.

Seuraavat väitteet ovat yhtäpitävät.

(1) $A = B$.
(2) $A \subset B$ ja $B \subset A$.
(3) $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$.

Lisää merkintöjä. $\{x | \text{ehto } x\text{:lle}\}$ = niiden alkioiden x joukko, jotka toteuttavat ehdon.

Esimerkiksi:

(1) $\{x \in \mathbb{Z} | |x| < 3\}$, alkiot: $-2, -1, 0, 1, 2$.
(2) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 = -1\} = \emptyset$.

Huomautus. Merkintä $\{a_1, \dots, a_n\}$ = alkioiden $a_1, \dots a_n$ joukko

$$= \{x | x = a_k \text{ jollakin } k = 1, \dots n\}.$$

Esimerkiksi:

(1) $\{1, 1, 1, 2\} = \{1, 2\}$ (kaksi alkiota)
(2) $\{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$
(3) $\{a_1, a_2, \dots\} = \{a_j | j \in \mathbb{N}\}$
(4) $\{a\}$ = joukko, jossa on tasan yksi alkio a, on ns. yksiö

Huomautus. $a \neq \{a\}$;

$x \in \{a\} \Longleftrightarrow x = a$.

Joukkojen laskutoimitukset. Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja.

Yhdiste

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ tai } x \in B\}.$$

Leikkaus

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ ja } x \in B\}.$$

Erotus

$$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ ja } x \notin B\}.$$

Esimerkki. $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N} = \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Sanonta. Joukot A ja B ovat pistevieraita, jos $A \cap B = \emptyset$.

Laskulakeja. Olkoot A, B ja C joukkoja.

Vaihdantalait:

(1) $A \cup B = B \cup A$
(2) $A \cap B = B \cap A$

Liitäntälait:

(1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

Osittelulait:

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De Morganin lait:

(1) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
(2) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

Todistus De Morganin laille (1).

$$\begin{aligned} x \in A \backslash (B \cup C) &\Longleftrightarrow x \in A \text{ ja } (x \notin B \cup C) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \text{ ja } (x \notin B \text{ ja } x \notin C) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \text{ ja } x \notin B) \text{ ja } (x \in A \text{ ja } x \notin C) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \backslash B \text{ ja } x \in A \backslash C \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C). \end{aligned}$$

Yleisemmät yhdiste ja leikkaus. Operaatiot $\cup$ ja $\cap$ voidaan yleistää seuraavasti: Olkoot I indeksijoukko ja joukot A_i joukon E osajoukkoja kaikilla $i \in I$.

Joukkojen A_i yhdiste ja leikkaus määritellään seuraavasti:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E | x \in A_i \text{ jollakin } i \in I\}$$

ja

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E | x \in A_i \text{ jokaisella } i \in I\}.$$

Jos erikoisesti $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, niin merkitään

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \,.$$

Jos $I = \mathbb{N}$, niin merkitään

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \\ &= \{x | x \in A_i \text{ jollakin } i \in \mathbb{N}\}\,. \end{aligned}$$

Esimerkiksi, kun $I = \{3, 4, 5, 6\}$,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=3}^{6} A_i &= A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \\ &= \{x | x \in A_j \text{ jollakin } j = 3, 4, 5, 6\}\,. \end{aligned}$$

Esimerkki. Olkoot $A_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

ja

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [-1, 1].$$

Reaaliluvuista

On useita tapoja määritellä reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Oletamme, että on olemassa epätyhjä joukko $\mathbb{R}$ alkioita, joita sanomme reaaliluvuiksi, ja jotka toteuttavat seuraavassa annettavat aksiomat, kun on annettu kaksi operaatiota (yhteenlasku ja kertolasku) ja kun on olemassa järjestysrelaatio.

Reaalilukujen aksiomat. $\mathbb{R}$:ssä on annettu kolme asiaa:

1. Yhteenlasku.

Jokaista paria $x, y \in \mathbb{R}$ kohti on annettu yksikäsitteisesti kolmas luku, jota merkitään $x + y$.

2. Kertolasku.

Jokaista paria $x, y \in \mathbb{R}$ kohti on annettu yksikäsitteisesti kolmas luku, jota merkitään xy tai $x \cdot y$.

3. Järjestysrelaatio.

Jokaista paria $x, y \in \mathbb{R}$ kohti tiedetään, onko $x < y$ voimassa vai ei. (Jos $x < y$, niin merkitään $y > x$.)

Nämä kolme annettua asiaa toteuttavat seuraavat aksiomat:

A. Kunta-aksiomat.

(1) $x + y = y + x$. (Vaihdantalaki)
(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$. (Liitäntälaki)
(3) $\exists 0 \in \mathbb{R}$, jolla $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (Nolla-alkio)
(4) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}$, jolla $x + y = 0$. Merkitään $y = -x$ ja $x - y = x + (-y)$. (Vasta-alkio)
(5) $xy = yx$.
(6) $x(yz) = (xy)z$.
(7) $x(y + z) = xy + xz$. (Osittelulaki)
(8) $\exists 1 \in \mathbb{R}$, jolla $1 \neq 0$ ja $1 \cdot x = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (Ykkösalkio)
(9) Jos $x \in \mathbb{R}$ ja $x \neq 0$, niin $\exists y \in \mathbb{R}$, jolla $xy = 1$. Merkitään $y = x^{-1}$ tai $y = \frac{1}{x}$ tai $1/x$. Merkitään $\frac{x}{y} = x/y = x \cdot y^{-1}$. (Käänteisalkio)

B. Järjestysaksiomat.

(1) Jos $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$, niin ehdoista $x < y$, $x = y$, $x > y$ on täsmälleen yksi voimassa.
(2) $x < y < z \Longrightarrow x < z$.
(3) $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$.
(4) $x > 0$ ja $y > 0 \Longrightarrow xy > 0$.

Merkitään:

(1) $x \leq y$, jos $x < y$ tai $x = y$.
(2) $x \geq y$, jos $x > y$ tai $x = y$.

C. Täydellisyysaksioma. Ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä $\mathbb{R}$:n osajoukolla on olemassa supremum. (Käsite "supremum" määritellään myöhemmin!)

Näistä aksiomista voidaan johtaa useita (reaalilukujen ominaisuuksia) sääntöjä (ks. Myrbergin kirja. Esimerkiksi, jos $x < y$ ja $z > 0$, niin $xz < yz$). Nämä säännöt oletamme jatkossa tunnetuiksi.

Reaaliakseli

Jokainen piste reaaliakselilla vastaa yhtä ja vain yhtä reaalilukua, ja kääntäen, jokainen reaaliluku vastaa yhtä ja vain yhtä pistettä reaaliakselilla.

Positiiviset kokonaisluvut eli <u>luonnolliset</u> <u>luvut</u> ovat $1, 2, 3, 4, \ldots$ Tätä lukujoukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{N}$.

Induktiivinen joukko. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on induktiivinen, jos

(1) $1 \in A$.
(2) Jokaiselle $x \in A$ pätee, että $x + 1 \in A$.

Luonnolliset luvut. Reaaliluku on luonnollinen luku, jos se kuuluu jokaiseen induktiiviseen joukkoon. Luonnollisten lukujen joukon symboli on $\mathbb{N}$.

Huomautus: $\mathbb{N}$ on itse induktiivinen joukko, sillä $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{N}$, $\ldots$ Koska $\mathbb{N}$ on osajoukkona jokaisessa induktiivisessa joukossa, niin voidaan sanoa, että $\mathbb{N}$ on pienin induktiivinen joukko.

Induktioperiaate. Olkoon $A \subset \mathbb{N}$. Oletetaan, että

(1) $1 \in A$.
(2) $n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$.

Tällöin $A = \mathbb{N}$. (Perustelu edellä.)

Esimerkki. *Osoita, että*

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Todistamme väitteen induktiolla.

(1) n=1: $1 = \frac{1}{4}(1+1)^2$. Eli väite pätee kun $n = 1$.
(2) <u>Induktio-oletus:</u> Väite on tosi, kun $n = k$.
(3) <u>Induktioväite:</u> Väite on tosi, kun $n = k + 1$. Todistus induktioväitteelle on

seuraava: $n = k+1$

$$\begin{aligned}
&1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 \qquad \text{(Induktio-oletuksen nojalla)} \\
&= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^2(k+1) \\
&= (k+1)^2(\frac{1}{4}k^2 + k + 1) \\
&= (k+1)^2\frac{1}{4}(k^2 + 4k + 4) \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2.
\end{aligned}$$

Siis

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Väite on siis todistettu.

Ei-negatiiviset kokonaisluvut ovat $0, 1, 2, \ldots$ Tämän lukujoukon symboli on $\mathbb{N}_0$. Se koostuu siis luonnollisista luvuista ja luvusta 0.

Kokonaisluvut ovat $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ Lukujoukon symboli on $\mathbb{Z}$. Tämä joukko koostuu siis luonnollisista luvuista, niiden vastaluvuista ja luvusta 0.

Rationaaliluvut eli murtoluvut

$$\frac{a}{b}\ , \text{ jossa } a \in \mathbb{N}_0,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\,.$$

Lukujoukon symboli on $\mathbb{Q}$.

Huomautus:

(1) $x, y \in \mathbb{Q} \Longrightarrow xy \in \mathbb{Q}, x + y \in \mathbb{Q}$
(2) $x, y \in \mathbb{Q},\ y \neq 0 \Longrightarrow x/y \in \mathbb{Q}$
(3) esimerkiksi $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, toisin sanoen, ei ole olemassa $x \in \mathbb{Q}$ siten, että $x^2 = 2$.

Irrationaaliluvut ovat $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Itseisarvo

Määritelmä. Reaaliluvun x itseisarvo on

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0. \\ -x, & \text{jos } x \leq 0. \end{cases}$$

Huomautus. *Aina pätee, että* $|0| = 0$ *ja* $|x| \geq 0$.

Kaavoja.

$$\begin{aligned}
&|-x| = |x| \\
&|xy| = |x||y| \\
&|x|^2 = x^2 \\
&|x| = \sqrt{x^2} \\
&-|x| \le x \le |x|
\end{aligned}$$

Kolmioepäyhtälöt. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Silloin

$$\Big||x| - |y|\Big| \le |x+y| \le |x| + |y| \,.$$

Todistus. (A) Oikean puolen todistus: Koska

$$\begin{cases} -|x| \le x \le |x| \\ -|y| \le y \le |y| \,, \end{cases}$$

niin

$$-|x| - |y| \le x + y \le |x| + |y| \,.$$

Siis

$$\begin{cases} x + y \le |x| + |y| \\ -(x+y) \le |x| + |y| \,, \end{cases}$$

joten

$$|x+y| \le |x| + |y| \,.$$

Siis oikea puoli on todistettu.

(B) Vasemman puolen todistus: (A) -kohdan nojalla

$$|x| = |(x+y) + (-y)| \le |x+y| + |-y| = |x+y| + |y| \,.$$

Siis

$$|x+y| \ge |x| - |y| \,.$$

Vastaavasti

$$|x+y| \ge |y| - |x| \,.$$

Väite on todistettu.

Bernoullin epäyhtälö. Kun $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ ja $x \ge -1$ niin $(1+x)^n \ge 1 + nx$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus induktiolla, katso Laskuharjoitustehtävä 1.4.

Huomautuksia. *(1) Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\Big||x| - |y|\Big| \le |x-y| \le |x| + |y| \,.$$

(2) Olkoot $x_i \in \mathbb{R}$, kun $i \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus induktiolla, katso Ohjaus 2.5.

(3)

$$|x| < |y| \Longleftrightarrow x^2 < y^2$$

Esimerkkejä. *(1) Olkoon $x \neq 1$. Silloin*

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{x^2-2x+1} < 1 \Longleftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$

(2)

$$|2x-1| \leq |x| + 1$$

Huomataan, että

$$2x - 1 \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

Jaamme ratkaisemisen kolmeen osaan: Siis

(1) $x \leq 0$: $|2x-1| \leq |x|+1 \Longleftrightarrow -(2x-1) \leq -x+1 \Longleftrightarrow 0 \leq x$. *Siis* $x = 0$.
(2) $0 < x \leq \frac{1}{2}$: $|2x-1| \leq |x|+1 \Longleftrightarrow -(2x-1) \leq x+1 \Longleftrightarrow 3x \geq 0$. *Siis* $0 < x \leq \frac{1}{2}$.
(3) $x > \frac{1}{2}$: $|2x-1| \leq |x|+1 \Longleftrightarrow 2x-1 \leq x+1 \Longleftrightarrow x \leq 2$. *Siis* $\frac{1}{2} < x \leq 2$.

Siis $|2x-1| \leq |x|+1$ *on voimassa, joss* $0 \leq x \leq 2$.

Rajoitetut joukot ja rajoittamattomat joukot

Välit. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(1) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ suljettu väli.
(2) $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ puoliavoin väli.
(3) $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ puoliavoin väli.
(4) $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ avoin väli.

Rajoittamattomat välit.

(1) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$.
(2) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$.
(3) $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$.
(4) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$.

Huomautus. $\infty \notin \mathbb{R}$, $-\infty \notin \mathbb{R}$. *Nämä symbolit esiintyvät vain ylläolevissa merkinnöissä.*

Määritelmä. Mielivaltainen, epätyhjä joukko $E \subset \mathbb{R}$ on ylhäältä rajoitettu, jos on olemassa $a \in \mathbb{R}$ siten, että $a \geq x$ kaikilla $x \in E$. Tällöin a on joukon E yläraja.

Esimerkkejä. *(1) Väli* $[0, 17]$ *on ylhäältä rajoitettu. Sen ylärajoja ovat esimerkiksi* 17 *ja* 100. *On syytä huomata, että myös jokainen avoin väli* (a, b) *on ylhäältä (ja alhaalta) rajoitettu kaikilla* $a, b \in \mathbb{R}$.

(2) $\mathbb{N}$ *ei ole ylhäältä rajoitettu.*

Huomautuksia. *(1) Jos mielivaltainen, epätyhjä joukko E on ylhäältä rajoitettu, sillä on aina äärettömän monta ylärajaa. Siis, jos luku a on joukon E yläraja ja luvulle b pätee, että $b \geq a$, niin myös b on joukon E yläraja.*

Vastaavasti määritellään käsitteet alhaalta rajoitettu ja alaraja.

Määritelmä. Joukko E on rajoitettu, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu. Jos joukko E ei ole rajoitettu, niin joukko E on rajoittamaton.

Huomautus. *Termin "rajoittamaton" tilalla käytetään myös termiä "rajaton".*

Lause 1.1. *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

(1) *Joukko E on rajoitettu.*
(2) *On olemassa luvut a ja b siten, että $a \leq x \leq b$ kaikilla $x \in E$.*
(3) *On olemassa luku $M > 0$ siten, että $|x| \leq M$ kaikilla $x \in E$.*

Esimerkkejä.

(1) *Väli (a, b), missä $a, b \in \mathbb{R}$, on aina rajoitettu.*
(2) *$\emptyset$ on rajoitettu.*
(3) *$\mathbb{Z}$ ei ole ylhäältä eikä alhaalta rajoitettu.*

Määritelmä. Luku a on joukon $E \subset \mathbb{R}$ pienin alkio, jos

(1) $a \in E$,
(2) $a \leq x \ \forall x \in E$.

Tällöin merkitsemme $a = \min E$.

Huomautus. *Joukon E pienin alkio on aina joukon E alaraja.*

Huomautus. *Vastaavasti määritellään mielivaltaisen, epätyhjän joukon E suurin alkio, jota merkitään $\max E$.*

Lause 1.2. *Joukolla $E \subset \mathbb{R}$ voi olla enintään yksi pienin alkio ja enintään yksi suurin alkio.*

Todistus. Olkoot a_1 ja a_2 molemmat joukon E pienimpiä alkioita. Koska a_1 on pienin, niin $a_1 \leq a_2$. Koska a_2 on pienin, niin $a_2 \leq a_1$. Siis välttämättä on oltava $a_1 = a_2$.

Esimerkki. *Olkoon $E = [0, 1)$. Tällöin joukon E pienin alkio on 0 ja joukolla E ei ole suurinta alkiota.*

Todistus. Tehdään antiteesi: On olemassa $\max E = b$. Koska $b \in E$, niin $0 \leq b < 1$. Mutta tällöin $\frac{b+1}{2} \in (b, 1)$. Siis $\frac{1}{2}(b+1) \in E$ ja $b < \frac{1}{2}(b+1)$, ja siten $b \neq \max E$, RR. Siis antiteesi on väärä ja alkuperäinen väitös on oikea.

Äärelliset joukot. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on äärellinen, jos siinä on äärellinen määrä alkioita. Näiden lukumäärää merkitään $\#A$.

Siis $\#A \in \mathbb{N}$.
Esimerkiksi:
$\#A = 0 \iff A = \emptyset$.
$\#A = 1 \iff A$ on yksiö .
$\#\{1, 6, 15\} = 3$.

Lause 1.3. *Jos $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ja A on äärellinen, niin joukossa A on suurin ja pienin alkio.*

Todistus. Merkitään $n = \#A$.
Induktio:
(a) $n = 1 : A = \{a\}$ yksiö; $a = \max A = \min A$.
(b) Induktio-oletus: lause on tosi, kun $n = p$.
Induktioväite: lause on tosi, kun $n = p + 1$.

Todistamme induktioväitteen: Olkoon siis $\#A = p+1$. Valitsemme jonkin alkion $a \in A$ ja merkitsemme, että $A_1 = A\setminus\{a\}$. Silloin $\#A_1 = p$ ja induktio-oletuksen nojalla on olemassa $\max A_1$, jota voimme merkitä a_1.

Jos $a_1 < a$, niin $a = \max A$.

Jos $a_1 > a$, niin $a_1 = \max A$.

Vastaavasti todistetaan minimin olemassaolo.

Ympäristöt

Olkoot $a \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$. Merkitsemme

$$U(a,r) = (a-r, a+r) = \{x \| x-a| < r\}\,,$$

joka on pisteen a r-ympäristö. Lyhyesti, sanomme, että $U(a,r)$ on pisteen a r-ystö.

Lisäksi

$$U^{'}(a,r) = U(a,r)\setminus\{a\}$$

on pisteen a punkteerattu ympäristö.

2. SUPREMUM JA INFIMUM

Määritelmä. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$. Luku $G \in \mathbb{R}$ on joukon E supremum eli pienin yläraja, jos se on pienin joukon E ylärajoista. Tällöin merkitsemme $G = \sup E$.

Huomautus. $G = \sup E \iff$

(1) *$G \geq x$ kaikilla $x \in E$ eli G on joukon E yläraja.*
(2) *$G \leq M$ kaikilla joukon E ylärajoilla M.*

Huomautus.

(1) *Joukolla voi olla enintään yksi supremum.*
(2) *Jos on olemassa* $\sup E$*, niin E on ylhäältä rajoitettu. Huomaa, että esimerkiksi* $\sup \mathbb{N}$*:ää ei ole olemassa.*

Määritelmä. *Luku $g \in \mathbb{R}$ on joukon E infimum eli suurin alaraja, jos se on suurin joukon E alarajoista. Tällöin merkitään $g = \inf E$.*

Huomautus. $g = \inf E \iff$

(1) *$g \leq x$ kaikilla $x \in E$ eli g on joukon E alaraja.*
(2) *$g \geq m$ jokaisella joukon E alarajalla m.*

Esimerkki. *Olkoon $E = (0, 1]$. Tällöin* $\sup E = 1$ *ja* $\inf E = 0$.

Todistus. $\sup E = 1$: Luku $y \in E$ on välin E yläraja, jos ja vain jos $y \geq 1$. Siis $\sup E = 1$.

$\inf E = 0$:

(1) $0 \leq x \quad \forall x \in (0, 1]$.
(2) Olkoon m välin $(0, 1]$ alaraja. Osoitamme, että $m \leq 0$. Teemme antiteesin: $m > 0$. Voidaan olettaa, että $m \leq \frac{1}{2}$. Silloin $0 < \frac{m}{2} \leq \frac{1}{4}$ ja siis $\frac{m}{2} \in (0, 1]$. Mutta $\frac{m}{2} < m$ ja siis m ei ole välin $(0, 1]$ alaraja, RR.

Lause 2.1. [Myrberg, Lause 1.4.1] *Jos* $E \subset \mathbb{R}$ *ja* $\max E$ *on olemassa, niin* $\max E = \sup E$. *Jos* $\min E$ *on olemassa, niin* $\min E = \inf E$.

Todistus. Olkoon olemassa $\max E = M$.

(1) M on joukon E yläraja eli $x \leq M \quad \forall x \in E$.
(2) Koska $M \in E$, niin $M \leq \sup E$. Toisaalta (1):n nojalla M on joukon E yläraja. Siis $M \geq \sup E$.

Siis $M = \sup E$.

Lause 2.2. [Myrberg, Lause 1.4.2] *Jos epätyhjällä joukolla $E \subset \mathbb{R}$ on olemassa supremum, niin supremum on yksikäsitteisesti määrätty.*

Todistus. Olkoot $\sup E = G$ ja $\sup E = G_1$. Siis G_1 on eräs joukon E yläraja ja siten supremumin määritelmän nojalla $G \leq G_1$. Samoin saadaan $G_1 \leq G$. Siis $G = G_1$.

SEURAAVAT KAKSI LAUSETTA OVAT ERITYISEN TÄRKEITÄ!

Lause 2.3. [Myrberg, Lause 1.4.3] *Olkoon* $G = \sup E$ *ja* $\epsilon > 0$. *Tällöin on olemassa* $x \in E$, *jolle* $x > G - \epsilon$.

Todistus. Teemme antiteesin: Tällaista alkiota x ei ole. Kaikilla $x \in E$ pätee, että $x \leq G - \epsilon$. Silloin $G - \epsilon$ on joukon E yläraja ja siten G ei olekaan pienin yläraja, koska $G - \epsilon < G$. On siis saatu RR. Siis antiteesi on väärä ja väitös oikea.

Lause 2.4. [Myrberg, Tehtävä 1.4.3] *Olkoon* $E \subset \mathbb{R}$ *ja* $G \in \mathbb{R}$ *siten, että*

(1) G *on joukon* E *yläraja,*
(2) $\forall \epsilon > 0\ \exists x \in E$, *jolle* $x > G - \epsilon$.

Tällöin $G = \sup E$.

Todistus. Olkoon a joukon E yläraja. Koska G on yläraja, niin riittää osoittaa, että $a \geq G$. Teemme vastaväitteen: $a < G$. Merkitsemme $\epsilon := G - a > 0$. Tällöin $a = G - \epsilon$ ja siis oletuksen (2) nojalla on olemassa $x \in E$, jolle $x > G - \epsilon = a$. Siis a ei olekaan yläraja, RR. Siis $G = \sup E$.

Lause 2.5. Vastaavasti infimumille. $g = \inf E \iff$

(1) Kaikilla $x \in E$ pätee, että $x \geq g$, eli g on joukon E alaraja.
(2) Jokaiselle $\epsilon > 0$ löytyy $x \in E$ siten, että $x < g + \epsilon$.

Esimerkki. *Määrää tarkasti perustellen joukon*

$$A = \left\{ \frac{2-n}{n} \Big| n \in \mathbb{N} \right\}$$

supremum ja infimum. Entä onko joukolla olemassa pienintä ja/tai suurinta arvoa?

Ratkaisu: Väite on, että $\max A$ on olemassa ja $\sup A = \max A = 1$. Todistamme tämän.

(1) Koska
$$\frac{2-n}{n} = -1 + \frac{2}{n} \leq -1 + \frac{2}{1} = 1\,, \forall n \in \mathbb{N}\,,$$
niin 1 on yläraja ja siis $\sup A \leq 1$.
(2) Toisaalta $1 \in \mathbb{N}$, joten $1 \in A$ ja siis $\max A = 1$.

Siis $\sup A = \max A = 1$.

Väite on, että $\inf A = -1$. Todistamme tämän.

(1) Koska $-1 + \frac{2}{n} > -1$ kaikilla $n \geq 1$, niin $\inf A \geq -1$.
(2) Toisen suunnan todistus: Olkoon $\epsilon > 0$. Väite tulee todistettua, jos löydämme sellaisen $n_0 \in \mathbb{N}$, että
$$\frac{2-n_0}{n_0} < -1 + \epsilon\,.$$
Vaadittu luku kyllä löytyy:
$$\frac{2-n_0}{n_0} < -1 + \epsilon \iff \frac{2}{n_o} - 1 < -1 + \epsilon \iff n_0 > \frac{2}{\epsilon}\,.$$
Vaadittu luku n_0 on saatu, kunhan valitsemme $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$.

Siis $\inf A = -1$.

Joukossa A ei ole pienintä arvoa, sillä yhtälöllä $\frac{2-n}{n} = -1$ ($= \inf A$) ei ole ratkaisua, kun $n \in \mathbb{N}$.

Täydellisyysaksioma 2.6. *Jos $E \subset \mathbb{R}$ on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, niin on olemassa* $\sup E$.

Havainto 2.7. *On olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle $x^2 = 2$.*

Todistus. Katso [Myrberg, Esimerkki 1.4.3].

Potenssit. Olkoon $x \in \mathbb{R}$.
Oletamme seuraavat säännöt tunnetuiksi:

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

ja

$$(x^m)^n = x^{mn} \,,$$

missä $m, n \in \mathbb{Z}$.

Lemma 2.8. *Olkoon $\emptyset \neq E \subset \mathbb{Z}$. Jos joukko E on ylhäältä rajoitettu, niin on olemassa* $\max E$*. Jos E on alhaalta rajoitettu, niin on olemassa* $\min E$*.*

Todistus. Katso Laskuharjoitustehtävä 2.5.

Olkoon E ylhäältä rajoitettu. Silloin on olemassa $\sup E =: G$. Lauseen 2.3 [Myrberg 1.4.3] nojalla on olemassa $x \in E$, jolle $x > G - \frac{1}{2}$. Tällöin $x = \max E$, sillä muutoin on olemassa $y \in E$, jolle $y > x$, jolloin $y \geq x + 1 > G$. Tällöin G ei ole joukon E yläraja, RR.
Vastaavasti osoitetaan Lemman jälkimmäinen väite.

Arkhimedeen lause. *(287–212 eKr.) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{Z}$, jolle $n > x$. (Tämä tarkoittaa sitä, että joukko $\mathbb{Z}$ ei ole ylhäältä rajoitettu.)*

Todistus.
(1) Jos $x < 0$, voimme valita $n = 0$.
(2) Voimme siis olettaa, että $x \geq 0$.

Merkitsemme, että $E = \{m \in \mathbb{Z} |\ m \leq x\}$. Koska $0 \in E$, niin $E \neq \emptyset$. Koska x on joukon E yläraja, niin E on ylhäältä rajoitettu. Täydellisyysaksioman nojalla joukolla E on olemassa pienin yläraja jota merkitsemme $\sup E = G$. Edellisen apulauseen nojalla $G = \max E$. Näin ollen $G \in \mathbb{Z}$. Merkitsemme $n = G + 1$, jolloin $n \in \mathbb{Z}$ ja $n \notin E$. Siis $n > x$.

Seurauslause 2.9. *Olkoon $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolle $\frac{1}{n} < x$.*

Todistus. Arkhimedeen lauseesta seuraa, että on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $n > \frac{1}{x}$. Siis $\frac{1}{n} < x$.

Lause 2.10. [Myrberg, Lause 1.7.2] *Kahden eri reaaliluvun välissä on aina rationaaliluku ja irrationaaliluku, molempia vieläpä äärettömän monta.*

Todistus. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $a < b$. On osoitettava, että on olemassa $r \in \mathbb{Q}$, jolle $a < r < b$. Merkitsemme $x := b - a > 0$. Arkhimedeen lauseen seurauslauseesta, seurauslause 2.10, seuraa, että on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolle $\frac{1}{n} < x$.
Merkitsemme $E := \{m \in \mathbb{Z} |\ m \geq nb\}$. Arkhimedeen lauseen nojalla $E \neq \emptyset$. Joukko E on alhaalta rajoitettu, koska luku nb on sen alaraja. Lemman 2.8 nojalla on olemassa $\min E = p$.

Koska $p-1 \notin E$, niin $p-1 < nb$ ja edelleen $\frac{p-1}{n} < b \leq \frac{p}{n}$. Jälkimmäinen arvio seuraa siitä, että $p \in E$.

Nyt $r = \frac{p-1}{n}$ on vaadittu luku, sillä

$$r = \frac{p}{n} - \frac{1}{n} > \frac{p}{n} - x \geq b - x = a\,.$$

Se, että rationaalilukuja on äärettömän monta, on todistettava Laskuharjoituksessa 2.6.

Irrationaalilukuja koskevat väitteet ovat harjoitustehtävä.

Seuraava korollaari on tärkeä!

Korollaari 2.11. *Jokaista reaalilukua voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaaliluvuilla. Siis jokaiselle $a \in \mathbb{R}$ ja $\epsilon > 0$ on olemassa $r_1\,, r_2 \in \mathbb{Q}$ siten, että*

$$a - \epsilon < r_1 < a < r_2 < a + \epsilon\,.$$

3. KUVAUS

Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. Jos jokaista alkiota (pistettä) $x \in A$ vastaa yksi ja vain yksi joukon B alkio y, sanotaan, että on määritelty kuvaus f joukolta A joukkoon B ja merkitään $f : A \to B$.

Kuvaus $f : A \to B$ on siis sääntö tai vastaavuus, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon x täysin määrätyn joukon B alkion y.

Alkiota y sanotaan x:n <u>kuvaksi</u> ja sitä merkitään symbolilla $f(x)$.

Joukko A on kuvauksen <u>lähtöjoukko</u>, (<u>määrittelyjoukko</u>). Joukko B on kuvauksen <u>maalijoukko</u>.

Joukko

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : \exists x \in A \text{ siten, että } f(x) = y\}$$

on joukon A <u>kuva</u> tai funktion f <u>arvojoukko</u>.

Jos $B_1 \subset B$, on

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A : f(x) \in B_1\}$$

joukon B_1 <u>alkukuva</u>.

Jos $A_1 \subset A$, on kuvaus $g : A_1 \to B$, $g(x) = f(x)$, kuvauksen f <u>rajoittuma</u> A_1:een ja sitä merkitään $g = f\Big|_{A_1}$.

Joukko

$$\{(x_1, f(x_1)) \in A \times B : x \in A\}$$

on funktion f graafi eli kuvaaja.

Huomautus. *Merkintä f on kuvaus ja merkintä $f(x)$ on joukon B alkio! Nämä ovat eri asioita.*

Huomautus. *Kuvausta f voi merkitä myös $x \mapsto f(x)$. Siis esimerkiksi $x \mapsto x^2$.*

Esimerkkejä.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g(n) = \frac{1}{n}$$

Kuvaus g on ns. lukujono, jota käsitellään enemmän myöhemmin.

Kuvaustyyppejä. Kuvaus $f : A \to B$ on (1) <u>surjektio</u>, jos $f(A) = B$. Siis, jos jokainen joukon B alkio on jonkun joukon A alkion kuva.

Toisin sanoen, f on surjektio, jos kaikilla $y \in B$ on olemassa $x \in A$, jolla $f(x) = y$. siis "kuvat täyttävät maalijoukon".

Kuvaus $f : A \to B$ on (2) <u>injektio</u>, jos

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ vain kun } x_1 = x_2 \,.$$

Toisin sanoen,

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2 \,.$$

Injektiossa siis eri alkiot kuvautuvat eri alkioille.

Kuvaus $f : A \to B$ on (3) <u>bijektio</u>, jos se on sekä surjektio että injektio.

Merkintä. *Merkitsemme usein, että*

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}\,.$$

Esimerkkejä.

(1) Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, on surjektio, sillä

$$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_+) = \{x | x \geq 0\}\,,$$

mutta f ei ole injektio, sillä esimerkiksi $f(1) = f(-1) = 1$.

(2) Funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$, on bijektio, sillä g on surjektio, koska jokainen $y \in \mathbb{R}$ on alkion $y/2 \in \mathbb{R}$ kuva, ja g on myös injektio: jos $g(x_1) = g(x_2)$, niin $2x_1 = 2x_2$ ja siis $x_1 = x_2$.

(3) Funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,

$$\begin{aligned}
&A = [-1, 2], \quad f(A) = [0, 4] \\
&B = [-1, 2], \quad f^{-1}(B) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] : \\
&x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B \Longleftrightarrow x^2 \in [-1, 2] \\
&x^2 \leq 2 \Longleftrightarrow |x| \leq \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Huomautuksia. *(1) Olkoon $f : A \to B$ kuvaus. Silloin kuvaus $g : A \to f(A)$, $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in A$, on surjektio.*

Jättämällä kuvapuolelta pois turhat pisteet, eli ne pisteet, joille ei mitään kuvaudu, saadaan jokainen kuvaus aina surjektioksi.

(2) Kaksi kuvausta $f_1 : A_1 \to B_1$ ja $f_2 : A_2 \to B_2$ ovat samoja, jos $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ ja $f_1(x) = f_2(x)$ kaikilla $x \in A_1$. Siis pelkkä "sama sääntö" ei takaa kuvausten samuutta; myös kuvausten lähdön ja maalin on oltava samat!

Esimerkki. *Olkoot*

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ s.e.\ f(x) = x^2 \\
&g : [1, 6] \to \mathbb{R} \ s.e.\ g(x) = x^2\,. \\
&\textit{Tällöin } g \neq f, \textit{ koska lähtöjoukot ovat eri joukot.}
\end{aligned}$$

Yhdistetty kuvaus. Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ kuvauksia. Yhdistetty kuvaus $g \circ f : A \to C$ on kuvaus, jolle

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ kaikilla } x\,.$$

Esimerkki.

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ s.e.\ f(x) = \cos x \\
&g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ s.e.\ g(x) = x^2 \\
&(g \circ f)(x) = (\cos x)^2
\end{aligned}$$

Määritelmä. Reaalifunktio on funktio $f : A \to \mathbb{R}$, jossa $A \subset \mathbb{R}$.

Huomautus. *Tällä kurssilla yleensä A on väli tai yleisemmin muotoa $A = \Delta \backslash F$, jossa F on äärellinen. Esimerkiksi $A = \mathbb{R} \backslash \{-1, +1\}$.*

Huomautus. *Useilla funktioilla on luonnollinen lähtö, jossa funktio on määritelty. Siis, jos f on määritelty analyyttisellä lausekkeella (Esimerkiksi $f(x) = 1/x$), niin ajatellaan, että funktion f lähtöjoukko on laajin reaalilukujoukko, jossa kyseinen lauseke on mielekäs. Esimerkiksi funktio $1/x$ on määritelty joukossa $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.*

Esimerkki. *Olkoon*

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}\,.$$

Funktion f luonnollinen lähtö on $A = \mathbb{R} \backslash \{-1, +1\}$, $f : A \to \mathbb{R}$.

Käänteiskuvaus. Olkoon $f : A \to B$ bijektio. Siis kaikilla $y \in B$ on olemassa yksikäsitteinen $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Merkitsemme tätä $x = f^{-1}(y)$, jolloin saadaan funktion f käänteiskuvaus

$$f^{-1} : B \to A\,.$$

Siis

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)\,.$$

Jos f ei ole bijektio, niin käänteiskuvaus f^{-1} ei ole määritelty.

Huomaa kuitenkin, että joukon $B_1 \subset B$ alkukuva, $f^{-1}(B_1)$ on aina määritelty.

Identtinen kuvaus. *Merkitsemme: $id_A : A \to A$ on identtinen kuvaus, jolla $id_A(x) = x$ kaikilla $x \in A$. Lyhyesti voidaan merkitä $id = id_A$, jos epäselvyyden vaaraa ei ole.*

Kuvaus id_A on bijektio ja $id_A^{-1} = id_A$.

Lause 3.1. *Olkoon $f : A \to B$ bijektio. Tällöin*
(1) *$f^{-1} : B \to A$ on bijektio.*
(2) *$(f^{-1})^{-1} = f$*
(3) *$f^{-1} \circ f = id_A$ ja $f \circ f^{-1} = id_B$.*

Todistus. Tämä on helppo harjoitustehtävä.

Lause 3.2. *Jos $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ ovat bijektioita, niin yhdistetty kuvaus $g \circ f : A \to C$ on bijektio ja*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\,.$$

Todistus. Tämä on helppo harjoitustehtävä.

Lause 3.3. *Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to A$ kuvauksia, joille $g \circ f = id_A$ ja $f \circ g = id_B$. Tällöin f on bijektio ja $g = f^{-1}$.*

Todistus. f on injektio, sillä

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = y\,.$$

f on surjektio, sillä

$$b \in B \Longrightarrow b = f(g(b))\,.$$

$$y = f(x) \Longrightarrow g(y) = g(f(x)) = x \Longrightarrow g = f^{-1}\,.$$

Nyt, koska f on injektio ja surjektio, on se myös siis bijektio.

Esimerkki. *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. *Osoita, että* f *on bijektio ja määritä* f^{-1}.

Ratkaisu: Tarkastellaan yhtälöä $y = 2x + 3$, *missä* x *on tuntematon ja* y *on annettu. Sillä on aina täsmälleen yksi ratkaisu* $x = \frac{y-3}{2}$. *Nyt siis* f *on bijektio ja* $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$, $y \in \mathbb{R}$.

4. LUKUJONON RAJA-ARVO

Huomautus. Yksi analyysin keskeisimmistä käsitteistä on lukujonon raja-arvo!

Esimerkkejä lukujonoista:

$$\begin{aligned}&1, 2, 3, 4, ...\\&0, 1, 0, 1, ...\\&1, 1/2, 1/3, 1/4, ...\\&5, 5, 5, 5, ...\end{aligned}$$

Lukujono. Jos jokaista luonnollista lukua n asetetaan vastaamaan reaaliluku x_n, saadaan päättymätön <u>lukujono</u>

$$(x_n) = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots .$$

Lukujono on kuvaus $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, jota merkitään

$$n \to x_n \quad \text{tai} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{tai} \quad (x_n)\,.$$

Huomautus. *Lukujonoa* (x_n) *ei saa merkitä* $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ *eikä* $\{x_n\}$.
Esimerkiksi, jonot

$$\begin{aligned}&(x_n) = 0, 1, 0, 1, 0, \dots\\&(y_n) = 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots \quad (\textit{loput termit kaikki ykkösiä})\end{aligned}$$

ovat eri jonoja, vaikka

$$\{x_n | n \in \mathbb{N}\} = \{y_n | n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}\,.$$

Lukujonon raja-arvo. Lukujonolla (x_n) on raja-arvo $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ vastaa luku $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x_n - a| < \epsilon\,, \text{ kun } n > n_\epsilon\,.$$

Toisin sanoen, jokaista pisteen a ympäristöä $U(a, \epsilon)$ vastaa luku n_ϵ siten, että

$$x_n \in U(a, \epsilon) \text{ aina kun } n > n_\epsilon\,.$$

Luku n_ϵ riippuu yleensä epsilonista.

Jos jonolla (x_n) on raja-arvo, sanotaan jonoa <u>suppenevaksi</u> eli <u>konvergoivaksi</u>. Jos jonon raja-arvo on a, niin sanomme, että jono (x_n) suppenee kohti lukua a ja merkitsemme

$$x_n \to a \text{ tai } a = \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

Jono hajaantuu eli divergoi, jos se ei suppene kohti mitään lukua.

Esimerkkejä.

(1) Lukujonon $5, 5, 5, \ldots$ *raja-arvo on* 5. *Yleisemmin: Jos* $x_n = x$ *kaikilla* n, *lukuunottamatta äärellistä määrää indeksejä, niin* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, *sillä*

$$|x_n - x| = |x - x| = 0 \text{ suurilla } n\,.$$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, *sillä, jos* $\epsilon > 0$, *on*

$$|0 - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{ , kunhan } n > \frac{1}{\epsilon}\,.$$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n}{1+1/n} = 1$, *sillä, jos* $\epsilon > 0$, *niin*

$$\Big|\frac{n-1}{n+1} - 1\Big| = \frac{2}{n+1} < \epsilon\,,$$

kunhan $n > \frac{2-\epsilon}{\epsilon}$.

Alarajan laskeminen n:lle:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{n+1} < \epsilon \\ &\iff 2 < \epsilon(n+1) \\ &\iff 2 < \epsilon n + \epsilon \\ &\iff 2 - \epsilon < n\epsilon \\ &\iff n > \frac{2-\epsilon}{\epsilon}\,. \end{aligned}$$

(4) Lukujono $0, 1, 0, 1, \ldots$ *hajaantuu. Todistetaan tämä:*

Tehdään vastaväite: Lukujono $0, 1, 0, 1, \ldots$ *suppenee eli on olemassa luku* $a \in \mathbb{R}$ *siten, että* $x_n \to a$, *kun* $n \to \infty$. *Tällöin on olemassa* n_ϵ *(voisimme merkitä* $n_{1/2}$ *) siten, että*

$$|x_n - a| < 1/2 \text{ , kun } n > n_\epsilon\,.$$

Valitaan $n > n_\epsilon$, *jolloin myös* $n + 1 > n_\epsilon$ *ja kolmioepäyhtälön nojalla*

$$\begin{aligned} 1 &= |x_n - x_{n+1}| = |(x_n - a) + (a - x_{n+1})| \\ &\le |x_n - a| + |x_{n+1} - a| < 1/2 + 1/2 = 1\,, \end{aligned}$$

mikä on ristiriita. Siis vastaväite on väärä ja väitös oikea ja siis jono $0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ *hajaantuu.*

Lause 4.1. *Lukujonolla voi olla enintään yksi raja-arvo.*

Todistus. Oletetaan, että $x_n \to a$ ja $x_n \to b$. Väitös siis on, että $a = b$.

Teemme vastaväitteen: $a \ne b$.

Merkitsemme $\epsilon = \frac{|a-b|}{3} > 0$. Tällöin on olemassa $n_\epsilon^{'}$ *s.e.*

$$|x_n - a| < \epsilon\,, \text{ kun } n > n_\epsilon'$$

ja tällöin on olemassa $n_\epsilon^{''}$ s.e.

$$|x_n - b| < \epsilon\,, \text{ kun } n > n_\epsilon^{''}\,.$$

Valitsemme $n_\epsilon = \max\{n_\epsilon^{'}, n_\epsilon^{''}\}$. Silloin kolmioepäyhtälön nojalla, kun $n > n_\epsilon$

$$\begin{aligned} 3\epsilon &= |a - b| \le |a - x_n| + |x_n - b| \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon\,, \end{aligned}$$

joten $3 < 2$, RR. Siis antiteesi on väärä ja väitös on oikea.

Lause 4.2. *Olkoon (x_n) suppeneva jono. Tällöin jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten että $|x_n - x_{n+p}| < \epsilon$, kun $n > n_\epsilon$ ja $p \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Olkoot $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ s.e.

$$|x_n - a| < \epsilon/2 \text{ , kun } n > n_\epsilon \,.$$

Olkoon nyt $n > n_\epsilon$ ja $p \in \mathbb{N}$, jolloin myös $n+p > n_\epsilon$. Siis kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+p}| &= |x_n - a + a - x_{n+p}| \\ &\le |x_n - a| + |a - x_{n+p}| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \,. \end{aligned}$$

Määritelmä. Jono (x_n) on
<u>nouseva</u>, jos $x_n \le x_{n+1}$ kaikilla n,
<u>aidosti</u> <u>nouseva</u>, jos $x_n < x_{n+1}$ kaikilla n,
<u>laskeva</u>, jos $x_n \ge x_{n+1}$ kaikilla n,
<u>aidosti</u> <u>laskeva</u>, jos $x_n > x_{n+1}$ kaikilla n,
<u>monotoninen</u>, jos se on nouseva tai laskeva ja
<u>aidosti</u> <u>monotoninen</u>, jos se on aidosti nouseva tai aidosti laskeva.

Huomautus. *Nouseva-sanan tilalla voidaan käyttää sanaa <u>kasvava</u> ja laskeva-sanan tilalla voidaan käyttää sanaa <u>vähenevä</u>.*

Esimerkkejä.
Jono $1, 2, 3, \ldots$ *on aidosti nouseva.*
Jono $1, 1/2, 1/3, \ldots$ *on aidosti laskeva.*
Jono $1, 1, 1, \ldots$ *on sekä nouseva että laskeva.*
Jono $0, 1, 0, 1, \ldots$ *ei ole monotoninen.*

Osajono. Jono (y_k) on jonon (x_n) <u>osajono</u>, jos $y_k = x_{n_k}$, missä pätee, että $n_1 < n_2 < \cdots$. Siis kun alkuperäisestä jonosta poistetaan osa termejä (jäljelle jää silti äärettömän monta) niin jäljellejäänyt jono on nyt alkuperäisen jonon osajono. Huomaa kuitenkin, että myös jono itse on aina oma osajononsa.

Huomautus. *$n_k \ge k$. Todistus induktiolla.*

Esimerkki. *Jono* $0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ *hajaantuu, mutta sen osajono* $0, 0, 0, 0, \ldots$ *suppenee.*

Lause 4.3. *Jos jono (x_n) suppenee kohti lukua a, niin sen jokainen osajonokin suppenee kohti lukua a.*

Todistus. Olkoon (y_k) jonon (x_n) osajono, $y_k = x_{n_k}$, kun $n_k \ge k$. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa n_ϵ s.e.

$$|x_n - a| < \epsilon \text{ , kun } n > n_\epsilon \,.$$

Jos nyt $k > n_\epsilon$, niin $n_k \ge k > n_\epsilon$ ja siis

$$|y_k - a| = |x_{n_k} - a| < \epsilon \,.$$

Määritelmä. Jono (x_n) on rajoitettu, jos joukko $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu. Toisin sanoen, jos on olemassa $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $a \leq x_n \leq b$ kaikilla n.

Esimerkkejä.

$$\begin{aligned} &1, 2, 3, 4, \ldots \textit{ ei ole rajoitettu jono.} \\ &1, 2, 1, 2, \ldots \textit{ on rajoitettu jono.} \\ &1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots \textit{ on rajoitettu jono.} \end{aligned}$$

Lause 4.4. *Suppeneva jono on aina rajoitettu.*

Todistus. Oletetaan, että jono (x_n) suppenee kohti lukua a. Valitaan $\epsilon = 1$. Tällöin on olemassa n_1 siten, että

$$|x_n - a| < 1 \text{ , kunhan } n > n_1 \, .$$

Kolmioepäyhtälön nojalla, kunhan $n > n_1$, pätee, että

$$|x_n| \leq |x_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \, .$$

Entä, kun $n \leq n_1$? Koska joukko $\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1}|\}$ on äärellinen, niin on olemassa luku $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1}|\}$.

Siis kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$|x_n| \leq \max\{M, 1 + |a|\} \, .$$

Huomautuksia.

(1) Käänteinen tulos ei päde! Vastaesimerkki on esimerkiksi jono $0, 1, 0, 1, \ldots$, *joka on selvästi rajoitettu, mutta joka ei kuitenkaan suppene.*

(2) Koska jono $1, 2, 3, \ldots$ *ei ole rajoitettu, niin se ei suppene edellisen lauseen nojalla.*

Seuraava lause on erittäin käyttökelpoinen!

Lause 4.5. Epäyhtälön säilymisen periaate. *Olkoot* (x_n) *ja* (y_n) *suppenevia jonoja ja* $x_n \leq y_n$ *kaikilla* n*. Tällöin*

$$\lim_{n \to \infty} x_n \leq \lim_{n \to \infty} y_n \, .$$

Huomautus. *Huomaa kuitenkin, että seuraava ei päde:*

$$x_n < y_n \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} x_n < \lim_{n \to \infty} y_n \, .$$

Esimerkiksi kelpaa seuraava: Valitsemme, että $x_n = 0$ *kaikilla* n *ja* $y_n = \frac{1}{n}$*. Tällöin*

$$x_n < y_n \quad \forall n \qquad \textit{MUTTA} \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = 0 = \lim_{n \to \infty} y_n \, .$$

Epäyhtälön säilymisen periaatteen todistus. Olkoot $x_n \to a$ ja $y_n \to b$. Väite on nyt siis, että $a \leq b$.

Teemme antiteesin: $a > b$.

Merkitsemme $\epsilon = \frac{a-b}{3} > 0$. Tällöin on olemassa $n_\epsilon^{'}$ siten, että

$$|x_n - a| < \epsilon\,, \text{ kun } n > n_\epsilon'$$

ja tällöin on olemassa $n_\epsilon^{''}$ s.e.

$$|y_n - b| < \epsilon\,, \text{ kun } n > n_\epsilon^{''}\,.$$

Valitsemme $n_\epsilon = \max\{n_\epsilon^{'}, n_\epsilon^{''}\}$. Silloin, kun $n > n_\epsilon$

$$\begin{aligned} & y_n - x_n < b + \epsilon - (a - \epsilon) = b - a + 2\epsilon = -\epsilon < 0 \\ & \Longrightarrow y_n < x_n\,, \end{aligned}$$

joten on saatu RR. Siis antiteesi on väärä ja väitös on oikea.

Epäyhtälön säilymisen periaatteen korollaari 4.6. *Olkoon $x_n \to a$ ja $x_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Silloin $a \leq M$.*

Todistus. Lauseessa 4.5 valitaan $y_n = M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jolloin $y_n \to M$.

Lause 4.7. [Myrberg, Lause 2.3.4] *Olkoot*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,, \lim_{n\to\infty} y_n = b\,.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} &(1) \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b \\ &(2) \lim_{n\to\infty} (rx_n) = ra, \textit{ missä } r \in \mathbb{R} \textit{ on vakio} \\ &(3) \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab \\ &(4) \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\,, b \neq 0\,, y_n \neq 0\,. \end{aligned}$$

Todistus. Katso Myrberg, Lauseen 2.3.4 todistus.

Kohta (1):

Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $n_\epsilon^{'}$ siten, että

$$|x_n - a| < \epsilon/2\,, \text{ kun } n > n_\epsilon'$$

ja tällöin on olemassa $n_\epsilon^{''}$ s.e.

$$|y_n - b| < \epsilon/2\,, \text{ kun } n > n_\epsilon^{''}\,.$$

Valitsemme $n_\epsilon = \max\{n_\epsilon^{'}, n_\epsilon^{''}\}$. Silloin kolmioepäyhtälön nojalla, kun $n > n_\epsilon$

$$\begin{aligned} & |(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |a - x_n| + |y_n - b| \\ & < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\,, \end{aligned}$$

siis $x_n + y_n \to a + b$.

Kohta (2) seuraa kohdasta (3), kun $y_n = r$ kaikilla n.

Kohdan (3) todistus:

$$\begin{aligned} &|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\ &= |(x_n - a) y_n + a(y_n - b)| \le |(x_n - a) y_n| + |a(y_n - b)| \\ &\le |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|\,, \end{aligned}$$

missä jono (y_n) on suppenevana jonona rajoitettu, lause 4.4 [Myrberg, Lause 2.3.2], ja siten on olemassa $M > 0$ s.e. $|y_n| \le M$ kaikilla n. Voimme valita lisäksi, että $M > |a|$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $n_\epsilon^{'}$ siten, että

$$|x_n - a| < \epsilon/2M\,, \text{ kun } n > n'_\epsilon$$

ja tällöin on olemassa $n_\epsilon^{''}$ s.e.

$$|y_n - b| < \epsilon/2M\,, \text{ kun } n > n_\epsilon^{''}\,.$$

Valitsemme $n_\epsilon = \max\{n_\epsilon^{'}, n_\epsilon^{''}\}$. Silloin kolmioepäyhtälön nojalla, kun $n > n_\epsilon$ saadaan, että

$$|x_n y_n - ab| \le M\epsilon/2M + M\epsilon/2M = \epsilon.$$

Väite on todistettu.

Kohdan (4) todistus:

Kohdan (3) nojalla riittää osoittaa, että

$$\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}\,.$$

Huom. $b \neq 0$.

$$\Big|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\Big| = \frac{|b - y_n|}{|y_n||b|}\,.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $n_\epsilon^{'}$.

$$|y_n - b| < \epsilon\,, \text{ kun } n > n'_\epsilon.$$

Erityisesti on olemassa n_1 s.e.

$$|y_n - b| < |b|/2\,, \text{ kun } n > n_1.$$

Näille n pätee, että

$$\begin{aligned} &|y_n| = |b - (b - y_n)| \\ &\ge |b| - |b - y_n| \ge |b| - |b|/2 = |b|/2\,. \end{aligned}$$

Siis

$$\Big|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\Big| \le |b - y_n| \frac{2}{|b|^2}\,.$$

Koska $y_n \to b$, niin tällöin on olemassa n_2 s.e.

$$|y_n - b| < \epsilon |b|^2/2\,, \text{ kun } n > n_2\,.$$

Kun $n > \max\{n_1, n_2\}$, niin

$$\Big|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\Big| < \epsilon\,.$$

Esimerkkejä. *(1)*

$$\frac{n}{1+n} = \frac{1}{1+1/n} \to \frac{1}{1+0} = 1, \ kun\ n \to \infty.$$

(2)

$$\frac{2+n}{3+4n+5n^2} = \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}}{\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n}+5} \to \frac{0+0}{0+0+5} = \frac{0}{5} = 0, \ kun\ n \to \infty.$$

Lause 4.8. *Olkoon (x_n) nouseva lukujono. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

(1) *lukujono (x_n) suppenee.*
(2) *lukujono (x_n) on rajoitettu.*
(3) *lukujono (x_n) on ylhäältä rajoitettu.*

Lisäksi tällöin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}.$$

Todistus. (1) $\Longrightarrow$ (2): On todistettu aikaisemmin, että suppeneva jono on aina rajoitettu, lause 4.4 [Myrberg, Lause 2.3.2].

(2) $\Longrightarrow$ (3): Selvä.

Riittää siis osoittaa, että (3) $\Longrightarrow$ (1):
Oletamme, että (3) pätee. Silloin on olemassa $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\} = G$. Väitämme, että $x_n \to G$. Olkoon $\epsilon > 0$. Silloin on olemassa n_0 s.e. $x_{n_0} > G - \epsilon$, [Myrberg, Lause 1.4.3]. Kun $n \geq n_0$, niin

$$G - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq G$$

Siis

$$|x_n - G| < \epsilon.$$

Vastaava tulos pätee laskeville jonoille:

Lause 4.9. *Olkoon (x_n) laskeva lukujono. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

(1) *lukujono (x_n) suppenee.*
(2) *lukujono (x_n) on rajoitettu.*
(3) *lukujono (x_n) on alhaalta rajoitettu.*

Lisäksi tällöin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}.$$

Seuraavan esimerkin ratkaisutapa on tärkeä:

Esimerkki. [Välikoetehtävä 1994]
Tehtävä: Olkoot $x_1 > 0$ ja $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$, $n \geq 1$. Osoita, että on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} x_n$ ja määrää tuo raja-arvo.

Ratkaisu:

$$x_1 > 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{x_1}{1+x_1} > 0 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow x_n > 0 \quad \forall n.$$

Siis jono (x_n) *on alhaalta rajoitettu.*

Koska

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n} < \frac{x_n}{1+0},$$

niin jono (x_n) *on laskeva.*

Siis raja-arvo on olemassa, ja merkitsemme $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Siis

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = \frac{a}{1+a}.$$

Edelleen

$$\begin{aligned} a &= \frac{a}{1+a} \\ a + a^2 &= a \\ a^2 &= 0 \\ a &= 0. \end{aligned}$$

Huomautus. *Usein kannattaa ensin määrätä* $x = \lim x_n$, *vaikkei sen olemassaoloa tiedetäkään; kyseinen luku on ainoa mahdollinen luku raja-arvoksi. Jonon* (x_n) *rajoittuneisuuden osoittamiseksi voidaan käyttää lukua* x *(ala- tai ylärajana sen mukaan, onko jono laskeva vai nouseva). Mutta raja-arvon olemassaolo ON AINA osoitettava!*

Neperin Luku e. *Koulussa on osoitettu, että*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Osoitamme, että raja-arvo on olemassa ja osoitamme yleisemmin, että

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Lause 4.10. *Olkoon* $x \in \mathbb{R}$. *Tällöin on olemassa*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Todistus. Merkitsemme

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Osa I: Osoitamme, että (x_n) on nouseva niillä n, joilla $n > |x|$.

Todistus. Olkoon $n > |x|$.

Koska

$$1 + \frac{x}{n} \geq 1 - \frac{|x|}{n} > 1 - 1 = 0,$$

niin $x_n > 0$.

Nyt

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}} = \left(1+\frac{x}{n}\right)a^{n+1},$$

missä

$$a = \frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} = \frac{[(n+1+x)n+x]-x}{(n+1)(n+x)} = 1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)} =: 1-t\,.$$

Jos $x \le 0$, niin

$$\frac{x}{(n+1)(n+x)} \le 0\,,$$

koska $n+x>0$. Jos $x>0$, niin

$$\frac{x}{(n+1)(n+x)} < \frac{1}{n+1} < 1\,,$$

koska $n+x>x$.

Aina pätee, että $-t>-1$.

Bernoullin epäyhtälöstä seuraa, että

$$(1-t)^{n+1} \ge 1-(n+1)t = 1-\frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x}\,.$$

Siis

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = (1+\frac{x}{n})(1-t)^{n+1} \ge (1+\frac{x}{n})\frac{n}{n+x} = 1\,.$$

Siis $x_n \le x_{n+1}$. Siis osa I on todistettu.

Osa II: Osoitamme seuraavaksi, että jono (x_n) on ylhäältä rajoitettu.

$$\begin{aligned} & (1+\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n}) = 1-\frac{x^2}{n^2} \le 1 \\ \Longrightarrow\quad & (1+\frac{x}{n}) \le (1-\frac{x}{n})^{-1}\ , \text{ kun } n>|x| \end{aligned}$$

$$x_n = (1+\frac{x}{n})^n \le (1-\frac{x}{n})^{-n}\ , \text{ kun } n>|x|$$

Merkitään: $k =$ pienin kokonaisluku, jolle pätee, että $k>|x|$.

Väite I implikoi, kun sijoitetaan $x\to -x$, että jono $(1-\frac{x}{n})^n$ on nouseva, kun $n\ge k$. Siis

$$(1-\frac{x}{n})^n \ge (1-\frac{x}{k})^k\ , \text{ kun } n\ge k\,,$$

Siis

$$(1-\frac{x}{n})^{-n} \le (1-\frac{x}{k})^{-k} =: M, \text{ kaikilla } n\ge k\,,$$

joten $x_n \le M$, kaikilla $n\ge k$.

Myös osa II on todistettu.

Huomautus. *Kun nyt sijoitetaan $x = 1$, saadaan ns. Neperin luku*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Huomautus. *Skotti John Napier (Neper) (1550–1617) oli logaritmien keksijä.*

Kuristuslause 4.11. *Olkoot $x_n \le y_n \le z_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} z_n$. Tällöin $y_n \to a$.*

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa n_0 s.e.

$$|x_n - a| < \epsilon \text{ ja } |z_n - a| < \epsilon\,, \text{ kun } n > n_0\,.$$

Näillä n on

$$a - \epsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \epsilon\,,$$

ja siis

$|y_n - a| < \epsilon\,.$

Esimerkki. *Määritä $\lim_{n\to\infty} y_n$, kun*

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\,.$$

Oletamme, että neliöjuuren ($\sqrt{\ }$) ominaisuudet tunnetaan.

Ratkaisu:

$$y_n \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} =: x_n\,,$$

ja

$$y_n \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} =: z_n\,.$$

Seuraavassa tarvitaan neliöjuurifunktion jatkuvuutta!

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{\sqrt{1}} = 1,\ \textit{kun}\ n \to \infty.$$

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to \frac{1}{\sqrt{1}} = 1,\ \textit{kun}\ n \to \infty.$$

Kuristuslauseesta seuraa, että $y_n \to 1$.

SEURAAVAT KAKSI LAUSETTA OVAT TÄRKEITÄ!

Lause 4.12. *Jokaisella lukujonolla on monotoninen osajono.*

Todistus. Olkoon (x_n) jono. Merkitsemme

$$S = \{n \in \mathbb{N} | x_n \leq x_m \text{ jokaisella } m > n\}\,.$$

Tapaus 1. S on ääretön joukko.

$$S = \{n_1, n_2, \dots\}, \text{ jossa } n_1 < n_2 < \cdots$$

Siinä siis $n_1 = \min S$, $n_2 = \min(S \setminus \{n_1\})\,, \dots$

Jos $n_k \in S$, niin $x_{n_k} \leq x_m$ kaikilla $m \geq n_k$. Siis

$$x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}\,.$$

Tapaus 2. S on äärellinen joukko.

Jos $S = \emptyset$, niin valitaan $n_1 = 1$.
Jos $S \neq \emptyset$, niin valitaan $n_1 = \max S + 1$.
Tällöin $n_1 > n\ \forall n \in S$.
$n_1 \notin S$, siis ei päde $x_{n_1} \leq x_m \forall m > n_1$.
Siis $\exists n_2 > n_1$, jolla $x_{n_2} < x_{n_1}$.
$n_2 \notin S$, siis ei päde $x_{n_2} \leq x_m \forall m > n_2$.
Siis $\exists n_3 > n_2$, jolla $x_{n_3} < x_{n_2}$.
Oletamme, että on löydetty luvut $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, joille $x_{n_1} > \cdots > x_{n_k}$.
$n_k \notin S$, siis ei päde $x_{n_k} \leq x_m \forall m > n_k$.
Siis $\exists n_{k+1} > n_k$, jolla $x_{n_{k+1}} < x_{n_k}$.
On siis saatu laskeva jono (x_{n_k}).

Bolzano-Weierstrass-Lause.
Rajoitetulla jonolla on aina suppeneva osajono.

Todistus. Olkoon (x_n) rajoitettu lukujono. Lauseen 4.12 nojalla sillä on olemassa monotoninen osajono (y_n).

Tämä osajono (y_n) on myös rajoitettu.

Siis meillä on rajoitettu, monotoninen osajono (y_n). Mutta aikaisemmin on todistettu lause (Myrberg, Lause 2.4.1), että silloin jono (y_n) suppenee.

Huomautus. *Huomaa, että Lause* 4.12 *ja Bolzano-Weierstrassin Lause puuttuvat Myrbergin kirjasta, vaikka ne ovat erittäin tärkeitä!*

Cauchyn kriteerio 4.13. *Olkoon (x_n) lukujono. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitävät:*

(1) *Lukujono (x_n) suppenee.*
(2) $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *s.e.* $|x_n - x_{n+p}| < \epsilon$, *kun* $n > n_0$ *ja* $p \in \mathbb{N}$.
(3) $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *s.e.* $|x_n - x_k| < \epsilon$, *kun* $n > n_0$ *ja* $k > n_0$.

Huomautuksia. *(1) Cauchyn kriteerion 4.13 ehdoissa (2) ja (3) ei esiinny itse raja-arvoa lainkaan!*
Suppenevuus saadaan selville tutkimalla lukujen x_n välisiä etäisyyksiä.

(2) Cauchyn kriteerio ei päde joukossa $\mathbb{Q}$. Esimerkiksi voimme valita jonon $x_n \in \mathbb{Q}$, jolle $x_n \to \sqrt{2}$. Tällöin (2) ja (3) ovat voimassa, mutta jono (x_n) ei suppene joukossa $\mathbb{Q}$.

(3) Ranskalainen Augustin L. Cauchy (1789–1857).

Cauchyn kriteerion todistus.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) selvä

(1) $\Longrightarrow$ (2) selvä, koska todistimme sen aikaisemmin, [Myrberg, Lause 2.2.1].

Riittää siis osoittaa, että (3) $\Longrightarrow$ (1).
Oletamme siis, että (3) on voimassa.
Sovellamme kohtaa (3), kun $\epsilon = 1$, jolloin saamme n_1 s.e. $|x_n - x_{n_1+1}| < 1$, kun $n > n_1$.
Siis

$$|x_n| \leq |x_n - x_{n_1+1}| + |x_{n_1+1}| \leq 1 + |x_{n_1+1}|,$$

kaikilla $n > n_1$. Siis kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$|x_n| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1}|, 1 + |x_{n_1+1}|\} = M.$$

Bolzano-Weierstrassin Lauseen nojalla löytyy suppeneva osajono (x_{n_j}) ja siis on olemassa $a \in \mathbb{R}$ s.e.

$$x_{n_j} \to a \text{ , kun } j \to \infty .$$

Osoitamme, että $x_n \to a$.

Todistus.
Olkoon $\epsilon > 0$. Kohdan (3) nojalla on olemassa n_0 s.e. $|x_n - x_k| < \epsilon/2$, kun $n > n_0$ ja $k > n_0$.
Koska $x_{n_j} \to a$, niin on olemassa j, jolle $n_j > n_0$ ja $|x_{n_j} - a| < \epsilon/2$. Kun $n > n_0$, niin

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_j}| + |x_{n_j} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon .$$

Siis $x_n \to a$.
Väite on todistettu.

Määritelmä. Lukujono (x_n) kasvaa rajatta, jos jokaista lukua $M \in \mathbb{R}$ vastaa indeksi n_M siten, että $x_n > M$, kunhan $n > n_M$. Toisin sanoen jonon (x_n) luvut ovat minkä tahansa ennalta valitun luvun yläpuolella, kunhan vain indeksi n_M on tarpeeksi suuri. Tällöin merkitään

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \text{ tai } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty .$$

Huomautus. *Symboli ∞ ei ole mikään luku. Jos $x_n \to \infty$, niin jono hajaantuu.*

Määritelmä. Lukujono (x_n) pienenee rajatta, jos jokaista lukua $m \in \mathbb{R}$ vastaa indeksi n_m siten, että $x_n < m$, kunhan $n > n_m$. Tällöin merkitään

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \quad \text{tai} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\,.$$

Esimerkkejä.

(1)
$$\lim_{n\to\infty} n = \infty, \textit{ sillä } n > M, \textit{ kun } n > M.$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty.$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty.$$

(4)
Jono $(x_n) = (-2)^n$ *ei kasva eikä pienene rajatta, mutta* $|x_n| = 2^n \to \infty$.

Lause 4.14. *Olkoon* $x_n > 0$. *Tällöin*

$$x_n \to \infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0.$$
$$x_n \to 0 \iff \frac{1}{x_n} \to \infty\,.$$

Todistus. Katso Laskuharjoitustehtävät 4.7 ja 4.8.

Esimerkki 4.15. *Olkoon* $a \in \mathbb{R}$. *Tutkimme jonoa* $(x_n) = a^n$. *Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \textit{jos } |a| < 1 \\ 1, & \textit{jos } a = 1 \\ \infty, & \textit{jos } a > 1 \\ \nexists, & \textit{jos } a \le -1 \end{cases}$$

Todistus.

Jos $a = 1$ niin $\lim x_n = \lim 1^n = 1$.

Jos $a > 1$ niin tällöin $a = 1 + p$, missä $p > 0$. Olkoon $M > 0$. Siis Bernoullin epäyhtälön nojalla saadaan, että

$$a^n = (1+p)^n \ge 1 + np > M\,,$$

kun $n > (M-1)/p$. Siis $\lim x_n = \infty$.

Jos $|a| < 1$. Olkoon $|a| = \frac{1}{1+p}$, missä $p > 0$. Olkoon $\epsilon > 0$. Silloin Bernoullin epäyhtälön nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned} |0 - a^n| &= |a^n| = |a|^n \\ &= \frac{1}{(1+p)^n} \le \frac{1}{1+np} < \epsilon\,, \end{aligned}$$

kunhan $n > (\frac{1}{\epsilon} - 1)/p$. Siis $\lim a^n = 0$.

Jos taas $a = -1$. Silloin $(a^n) = -1, 1, -1, 1, \dots$, joten jono hajaantuu, sillä Cauchyn ehto ei ole voimassa, koska $|a_m - a_{m+1}| = 2$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$.

Ja vielä, jos $a < -1$. Silloin $\lim a^{2n} = \infty$ ja $\lim a^{2n+1} = -\infty$ ja jono (a^n) hajaantuu.

5. FUNKTION RAJA-ARVO

Määritelmä. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ ja $U(x_0, r) \setminus \{x_0\} \subset A$. Toisin sanoen, funktio f on määritelty pisteen x_0 punkteeratussa ympäristössä. Sanomme, että funktiolla f on pisteessä x_0 raja-arvo a, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ kun } 0 < |x_0 - x| < \delta\,,$$

eli

$$f(x) \in U(a, \epsilon)\ , \text{ kun } x \in U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}\,.$$

Edellä $\delta < r$.

Tällöin merkitään

$$f(x) \to a\ , \text{ kun } x \to x_0$$

tai

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\,.$$

Esimerkkejä.

(1) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Silloin

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0\,.$$

(2) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Silloin

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2\,.$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin

$$|f(x) - x_0^2| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|\,.$$

Olkoon $|x - x_0| < 1$. Silloin

$$\begin{aligned} |x + x_0| &= |x - x_0 + x_0 + x_0| \\ &\le |x - x_0| + 2|x_0| \le 1 + 2|x_0| =: M\,. \end{aligned}$$

Siis

$$|f(x) - x_0^2| \le |x - x_0| M < \epsilon\,,$$

kunhan

$$0 < |x - x_0| < \frac{\epsilon}{M}\,.$$

Siis valitsemme $\delta = \frac{\epsilon}{M}$.

(3) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, kun $x \neq 1$ ja $f(1) = 19$. Silloin

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1\,.$$

Sama todistus kuin yllä.

Huomautuksia. *(1) Funktion f täytyy olla määritelty jossain pisteen x_0 ympäristössä lukuunottamatta pistettä x_0, jossa sen ei tarvitse olla määritelty. Huomaa siis, että funktion f mahdollinen arvo pisteessä x_0 ei vaikuta funktion raja-arvoon.*
(2) Luku δ riippuu yleensä luvusta ϵ.

Lause 5.1. *Funktiolla f voi pisteessä x_0 olla enintään yksi raja-arvo.*

Todistus. Oletetaan, että on olemassa raja-arvot a ja b. Väitämme, että $a = b$.

Teemme vastaväitteen: $a \neq b$.
Merkitsemme $\epsilon = \frac{|a-b|}{3} > 0$. Tällöin on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \epsilon \,, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \,,$$

ja tällöin on olemassa $\delta_2 > 0$ siten, että

$$|f(x) - b| < \epsilon \,, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \,,$$

Valitsemme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Valitsemme luvun x s.e. $0 < |x - x_0| < \delta$. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla,

$$\begin{aligned} &3\epsilon = |a-b| = |a - b + f(x) - f(x)| \leq |a - f(x)| + |f(x) - b| \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \,, \end{aligned}$$

joten $3 < 2$, RR. Siis antiteesi on väärä ja alkuperäinen väite on oikea.

Huomautus. *Merkintä*

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x) \,.$$

on järkevä, koska raja-arvo on yksikäsitteinen.

Lause 5.2. *Olkoon $\lim_{x \to x_0} f(x)$ olemassa. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e.*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \textit{ kun } x_1, x_2 \in U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \,.$$

Todistus. Merkitsemme

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x) \,.$$

Tällöin on olemassa $\delta > 0$.

$$|f(x) - a| < \epsilon/2 \,, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \delta \,.$$

Kun $x_1, x_2 \in U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$, saamme

$$\begin{aligned} &|f(x_1) - f(x_2)| \leq |a - f(x_1)| + |f(x_2) - a| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \,. \end{aligned}$$

Funktion raja-arvon käsite palautuu lukujonon raja-arvon käsitteeseen seuraavan lauseen avulla:

Lause 5.3. *Olkoon f määritelty pisteen x_0 punkteeratussa ympäristössä $U(x_0, r)\backslash\{x_0\}$ ja olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

(2) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ *jokaisella jonolla* (x_n), *jolla* $x_n \in U(x_0, r)\backslash\{x_0\}$ $\forall n$ *ja* $x_n \to x_0$.

Huomautus. $x_n \neq x_0$.

Lauseen 5.3 todistus. (1) $\Longrightarrow$ (2):

Olkoon (x_n) jono, $x_n \in U(x_0, r)\backslash\{x_0\}$, $x_n \to x_0$.

Väitämme, että $f(x_n) \to a$, kun $n \to \infty$.

Todistus: Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

Koska $x_n \to x_0$, niin $\exists n_0$ s.e.

$$0 < |x_n - x_0| < \delta\,, \text{kun } n > n_0\,.$$

Näillä n on

$$|f(x_n) - a| < \epsilon\,.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1):

Teemme vastaväitteen, siis oletamme, että (1) ei päde. Silloin on olemassa $\epsilon > 0$, jolla ei ole olemassa vastaavaa lukua δ. Siis mikään luvuista $1/n$ ei kelpaa luvuksi δ. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_n \in U(x_0, r)\backslash\{x_0\}$, jolle

$$|x_n - x_0| < 1/n \quad ja \quad |f(x_n) - a| \geq \epsilon\,,$$

mutta koska $x_n \to x_0$, niin (2):sta seuraa, että $f(x_n) \to a$, kun $n \to \infty$, RR. Siis (1) pätee.

Lauseen 5.3 avulla todistamme:

Lause 5.4. *Olkoon*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad ja \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b \quad ja \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Tällöin

(1) $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$.

(2) $\lim_{x\to x_0} (tf(x)) = ta$, *missä* $t \in \mathbb{R}$ *on vakio.*

(3) $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = ab$.

Jos $b \neq 0$, *niin*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}\,.$$

Todistus. Käytämme Lausetta 5.3. Olkoon $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Lauseesta 5.3 seuraa, että [Myrberg, Lause 2.8.3]

$$f(x_n) \to a \quad \text{ja} \quad g(x_n) \to b\,, \text{ kun } n \to \infty\,.$$

Silloin [Myrberg, Lause 2.3.4]

$$f(x_n) + g(x_n) \to a + b\,, \text{ kun } n \to \infty\,.$$

Uudelleen, edellinen lause [Myrberg, Lause 2.8.3]

$$f(x) + g(x) \to a + b\,, \text{ kun } x \to x_0\,.$$

Muut kohdat todistetaan samalla tavalla.

Määritelmä. Reaalifunktio on rajoitettu joukossa A, jos on olemassa $M > 0$ siten, että $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in A$.

Esimerkki. *$f(x) = 1/x$ on rajoitettu joukossa $[1, \infty[$, mutta f ei ole rajoitettu joukossa $]0, \infty[$.*

Lause 5.5. *Jos funktiolla f on raja-arvo pisteessä x_0, niin f on rajoitettu eräässä pisteen x_0 punkteeratussa ympäristössä $U(x_0, r)\setminus\{x_0\}$.*

Todistus. Olkoon

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\,.$$

Valitaan $\epsilon = 1$. Silloin raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$|f(x) - a| < 1\,, \text{ kun } x \in U(x_0, \delta)\setminus\{x_0\}\,.$$

Mutta näillä x:n arvoilla.

$$|f(x)| = |f(x) - a + a| \leq |f(x) - a| + |a| < 1 + |a|\,.$$

Toispuoleiset raja-arvot. Olkoon $\eta > 0$. Olkoon f välillä $(x_0 - \eta, x_0)$ määritelty funktio. Luku a on funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä x_0, ja tällöin merkitsemme

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a\,,$$

jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ s.e.

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ kun } x \in (x_0 - \delta, x_0)\,.$$

Olkoon $\eta > 0$. Olkoon f välillä $(x_0, x_0 + \eta)$ määritelty funktio. Luku a on funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä x_0, ja tällöin merkitsemme

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = a\,,$$

jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ s.e.

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ kun } x \in (x_0, x_0 + \delta)\,.$$

Lause 5.6. *Funktiolle f on voimassa*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\,,$$

aina ja vain kun

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = a = \lim_{x \to x_0 +} f(x)\,.$$

Todistus. $\Longrightarrow$: Tämä suunta on selvä.

$\Longleftarrow$: Olkoon $\epsilon > 0$. Silloin on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ kun } x \in (x_0 - \delta_1, x_0)\,.$$

Tällöin on myös olemassa $\delta_2 > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ kun } x \in (x_0, x_0 + \delta_2)\,.$$

Valitsemme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, jolloin saamme

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ kun } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\setminus\{x_0\}\,. \text{ Eli } \lim_{x \to x_0} f(x) = a\,.$$

Huomautus. *Vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot voivat olla olemassa pisteessä x_0 ilman, että raja-arvo olisi olemassa pisteessä x_0. Esimerkiksi, jos*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{kun } x < 0 \\ 100, & \textit{kun } x > 0\,, \end{cases}$$

niin

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0 \quad \textit{ja} \lim_{x \to 0+} f(x) = 100\,,$$

joten $\lim_{x \to 0} f(x)$ *ei ole olemassa, vaikka toispuoleiset raja-arvot ovatkin olemassa.*

Raja-arvo äärettömyydessä. Luku a on funktion f raja-arvo äärettömyydessä, eli

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a\,,$$

jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ vastaa luku M_ϵ siten, että

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ kun } x > M_\epsilon\,.$$

Vastaavasti luku a on funktion f raja-arvo $-\infty$:ssä, eli

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a\,,$$

jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ vastaa luku m_ϵ siten, että

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ kun } x < m_\epsilon\,.$$

Raja-arvo ääretön. Funktiolla f on pisteessä x_0 raja-arvo ∞, eli

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty\,,$$

jos jokaista lukua M vastaa luku $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) > M\,, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

Vastaavasti määritellään

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,.$$

Lemma 5.7. *Olkoon $f(x) > 0$ kaikilla x. Silloin*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0\,,$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = \infty\,,$$

jossa α voi olla tyyppiä x_0, x_0+, x_0-, ∞, $-\infty$.

Todistus. Tämä on Laskuharjoitustehtävä 6.1.

Esimerkki 5.8. *(Tavallaan pieni lause.)*

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \begin{cases} \infty, & \text{jos } p \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{jos } p = 0 \\ 0, & \text{jos } p \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Todistetaan jokainen kohta erikseen:

(1) Jos $p \in \mathbb{N}$, ja $x \geq 1$, niin $x^p \geq x$, joten valittiinpa $M > 1$ miten suureksi tahansa, on $x^p > M$ heti, kun $x > M$. Siis

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \infty\,, \text{ kun } p \in \mathbb{N}\,.$$

(2) Jos $p = 0$, on $x^p = 1$ kaikilla $x \neq 0$, joten

$$\lim_{x\to\infty} x^0 = 1\,.$$

(3) Jos $p \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0$, on $x^p = \frac{1}{x^m}$, missä $m = -p$. Siis ensimmäisen kohdan perusteella

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^m} = \frac{1}{\infty} = 0\,.$$

Monotonisen funktion raja-arvo. Funktio f on:

Kasvava, jos $f(x_1) \leq f(x_2)$ aina kun $x_1 < x_2$.
Aidosti kasvava, jos $f(x_1) < f(x_2)$ aina kun $x_1 < x_2$.
Vähenevä, jos $f(x_1) \geq f(x_2)$ aina kun $x_1 < x_2$.
Aidosti vähenevä, jos $f(x_1) > f(x_2)$ aina kun $x_1 < x_2$.

Kasvavia ja väheneviä funktioita sanotaan monotonisiksi funktioiksi. Funktio on aidosti monotoninen, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä. Huomaa, että esimerkiksi vakiofunktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5$, on sekä kasvava että vähenevä koko $\mathbb{R}$:ssä.

Lause 5.9. *Olkoon* $\Delta =]a, b[$. *Nyt voi olla* $a = -\infty$ *tai* $b = \infty$. *Olkoon* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *kasvava. Tällöin:*

(1) Jos f on ylhäältä rajoitettu, niin on olemassa

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \sup\{f(x) | x \in \Delta\}\,.$$

(2) Jos f ei ole ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \infty\,.$$

(3) Jos f on alhaalta rajoitettu, niin on olemassa

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \inf\{f(x) | x \in \Delta\}\,.$$

(4) Jos f ei ole alhaalta rajoitettu, niin

$$\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty\,.$$

Huomautus. *Huomaa merkinnät silloin, kun* $b = \infty$ *ja* $a = -\infty$*; eli* $\lim_{x \to \infty}$ *ja* $\lim_{x \to -\infty}$.

Todistus. (1) Olkoon f ylhäältä rajoitettu. Silloin on olemassa

$$G = \sup\{f(x) | x \in \Delta\}\,.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $x_1 \in \Delta$, jolle $f(x_1) > G - \epsilon$.
Kun $x_1 < x < b$, niin $G - \epsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq G$. Siis $G = \lim_{x \to b-} f(x)$.

(2) Oletetaan, että f ei ole ylhäältä rajoitettu. Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Silloin $\exists x_1$ s.e. $f(x_1) > M$. Kun $x_1 < x < b$, niin $M < f(x_1) \leq f(x)$. Siis

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \infty\,.$$

Kohdat (3) ja (4) ovat samantapaiset ja siksi niiden todistukset jätetään harjoitustehtäviksi.

Huomautus. *Vastaavat tulokset kuin edellisessä lauseessa pätevät myös väheneville funktioille.*

Esimerkki. *Olkoon* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = 1/x$. *Funktio f on vähenevä ja se ei ole ylhäältä rajoitettu, mutta se on alhaalta rajoitettu. Nyt*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \textit{ja} \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = \infty\,.$$

6. FUNKTION JATKUVUUS

Huomautus. *Analyysin yksi keskeisimmistä käsitteistä on jatkuvuus!*

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ mielivaltainen joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$.

Jatkuvuus. Olkoon $x_0 \in A$. Funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,, \text{ kun } x \in A \text{ ja } |x_0 - x| < \delta\,,$$

eli kun $x \in A \cap U(x_0, \delta)$. Muutoin f on epäjatkuva pisteessä x_0. Funktio f on jatkuva, jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in A$.

Huomautus. *Jos $x_0 \notin A$, niin f ei ole pisteessä x_0 jatkuva eikä epäjatkuva.*
Siis esimerkiksi, $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ ei ole origossa epäjatkuva, vaikka niin näkyy joskus esitettävän.

Erikoistapaus. *Oletetaan, että $r > 0$, jolle $U(x_0, r) \subset A$. Nyt*

$$f \text{ jatkuva pisteessä } x_0 \iff f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)\,.$$

Toisin sanoen, jokaista lukua $\epsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,, \text{ kun } |x_0 - x| < \delta\,,$$

eli mitä tahansa $f(x_0)$:n ϵ-ympäristöä $U(f(x_0), \epsilon)$ kohti löytyy x_0:n δ-ympäristö $U(x_0, \delta)$ siten, että

$$f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \epsilon)\,.$$

Tämä on itse asiassa otettu Myrbergin kirjassa jatkuvuuden määritelmäksi.

Suljetun välin tapaus. Jos taas $A = [a, b]$, niin

$$f \text{ jatkuva } a\text{:ssa} \iff f(a) = \lim_{x \to a+} f(x)\,.$$

ja

$$f \text{ jatkuva } b\text{:ssä} \iff f(b) = \lim_{x \to b-} f(x)\,.$$

Esimerkkejä. *(1) Vakiofunktio $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c = f(x_0) \text{ kaikilla } x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

(2) Identtinen funktio $f(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0) \text{ kaikilla } x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

(3) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Silloin

$$|f(x) - f(x_0)| \le \Big||x| - |x_0|\Big| \le |x - x_0|\,.$$

Voimme siis valita $\delta = \epsilon$ ja näin ollen f on jatkuva kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}$.

Paloittain jatkuvuus. Olkoon Δ väli. Funktio $f : \Delta \to \mathbb{R}$ on paloittain jatkuva, jos f on jatkuva paitsi äärellistä määrää pisteitä, joissa funktiolla f on vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo.

Esimerkki. *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{kun } x > 0 \\ -1, & \textit{kun } x < 0 \\ 0, & \textit{kun } x = 0\,. \end{cases}$$

Funktio f on paloittain jatkuva.

Jatkuvuuden yhteys jonoihin.

Lause 6.1. [Myrberg, Lause 3.3.2] *Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ ja $x \in A$. Silloin f on jatkuva pisteessä x_0, jos ja vain jos $f(x_n) \to f(x_0)$ kaikilla jonoilla (x_n), joilla $x_n \in A$ ja $x_n \to x_0$.*

Todistus. Lause todistetaan kuten vastaava lause raja-arvoille [Myrberg, Lause 2.8.3].

Esimerkki. *Jos $x_n \to a$, niin myös $|x_n| \to |a|$, sillä kuvaus $x \mapsto |x|$ on jatkuva.*

Lause 6.2. *Olkoon $f, g : A \to \mathbb{R}$ jatkuvia pisteessä x_0. Silloin $f + g$, $f - g$ ja fg ovat jatkuvia pisteessä x_0. Jos $g(x_0) \neq 0$, niin $g(x) \neq 0$ eräässä $A \cap U(x_0, r)$:ssa ja $\frac{f}{g}\Big|_{A\cap U(x_0,r)}$ on jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. Lause todistetaan [Myrberg, Lause 3.3.2 ja 3.3.4] avulla.

Merkintä. *Olkoon Δ väli. Merkitsemme*

$$\mathcal{C}(\Delta) = \{f | f : \Delta \to \mathbb{R} \textit{ jatkuva}\}\,.$$

Lause 6.3. *Jos $f, g \in \mathcal{C}(\Delta)$, niin $f + g \in \mathcal{C}(\Delta)$ ja $fg \in \mathcal{C}(\Delta)$. Jos $g(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \Delta$, niin $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}(\Delta)$.*

Lause 6.4. *Olkoon $f : A \to B$, $g : B \to C$, $C \subset \mathbb{R}$. Olkoon f jatkuva pisteessä x_0 ja g jatkuva pisteessä $f(x_0)$. Tällöin $g \circ f$ on jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska g on jatkuva $f(x_0)$:ssa, niin tällöin on olemassa δ_1 s.e.

$$|g(y) - g(f(x_0))| < \epsilon\,, \text{ kun } y \in B \text{ ja } |f(x_0) - y| < \delta_1\,.$$

Koska f jatkuva pisteessä x_0, niin on olemassa δ s.e.

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta_1\,, \text{ kun } x \in A \text{ ja } |x_0 - x| < \delta\,.$$

Näillä x pätee, että

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon\,.$$

Korollaari 6.5. *Jatkuvista funktioista yhdistetty funktio on jatkuva.*

Esimerkkejä. *(1) Polynomifunktio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.*

(2) Rationaalifunktio $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, missä P ja Q ovat jatkuvia, on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä lukuunottamatta Q:n nollakohtia.

(3) Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e. $g : x \mapsto |x|$. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Silloin $h = g \circ f : x \mapsto |f(x)|$ on aina määritelty ja jatkuva.

Jatkuvien funktioiden peruslauseita

Seuraavat lauseet ovat TÄRKEITÄ lauseita, jotka on muistettava!

Lause 6.6. *Olkoon f jatkuva pisteessä x_0 ja olkoon $f(x_0) > 0$. Silloin $f(x) > 0$ jossain pisteen x_0 ympäristössä.*

Todistus. Valitaan $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Silloin jatkuvuuden määritelmän mukaan löytyy pisteen x_0 δ-ympäristö $U(x_0, \delta)$, jolle

$$f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \epsilon) \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\},$$

sillä löytyy $\delta > 0$ s.e.

$$|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2\,, \text{ kun } |x_0 - x| < \delta\,,$$

siis purkamalla itseisarvomerkit saadaan, että

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}\,, \text{ kun } |x_0 - x| < \delta\,.$$

Lause 6.7. *Olkoon f jatkuva pisteessä x_0 ja olkoon $f(x_0) < 0$. Silloin $f(x) < 0$ jossain pisteen x_0 ympäristössä.*

Todistus. Lause todistetaan vastaavasti kuin edellinen lause, valitsemalla nyt $\epsilon = \frac{f(x_0)}{-2} > 0$.

Bolzanon lause. *Jos välillä $[a, b]$ jatkuvalla funktiolla f on erimerkkiset arvot välin päätepisteissä, niin on olemassa ainakin yksi piste $c \in (a, b)$ s.e. $f(c) = 0$.*

Huomautuksia. *(1) Intermediate Value Theorem.*

(2) Todistuksen voisi tehdä käyttäen antiteesiä ja kahta edellistä lausetta. Emme tee nyt kuitenkaan niin, vaan todistamme lauseen toisin.

Bolzanon lauseen todistus. Olkoon esimerkiksi $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$. Merkitsemme

$$E = \{x \in [a, b] | f(x) < 0\}\,.$$

Koska $a \in E$, niin $E \neq \emptyset$, ja koska $E \subset [a, b]$, niin E on rajoitettu. Siis on olemassa $c = \sup E$.

Nyt $a \leq c \leq b$. Osoitamme, että $f(c) = 0$.

Kaikille $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_n \in E$, jolla $c - 1/n < x_n \leq c$. Tällöin $x_n \to c$ ja $f(x_n) < 0$. Koska f on jatkuva, niin $f(x_n) \to f(c)$. Koska edelleen $f(x_n) < 0$, niin $f(c) \leq 0$. Siis $c < b$.

Kun $c < x \leq b$, niin $x \notin E$, sillä c on E:n yläraja. Siis $f(x) \geq 0$. Näin ollen $f(c) = \lim_{x \to c+} f(x) \geq 0$.

Yhdistämällä edelliset tulokset, saamme että $f(c) = 0$, eli väitteen.

Bolzanon lauseen seurauslause 6.8. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin f saa kaikki arvot, jotka ovat lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä.*

Todistus. Olkoon $f(a) < y < f(b)$. Sovellamme Bolzanon lausetta jatkuvaan funktioon F, missä $F(x) = f(x) - y$, $x \in [a, b]$. Koska $F(a) < 0$ ja $F(b) > 0$, niin on olemassa piste $c \in (a, b)$, jolla $F(c) = 0$ eli $f(c) = y$.

Esimerkki. *Osoita, että polynomilla* $P(x) = x^5 - 4x - 2$ *on ainakin yksi nollakohta välillä* $(1, 2)$.

Ratkaisu: P *on jatkuva koko* $\mathbb{R}$*:ssä ja* $P(1) = -5 < 0$ *ja* $P(2) = 32 - 8 - 2 > 0$, *siis Bolzanon lauseen nojalla on olemassa ainakin yksi nollakohta välillä* $(1, 2)$.

Funktion suurin ja pienin arvo. Olkoon A joukko, $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Jos on olemassa

$$\max f(A) = \max\{f(x)|x \in A\} = \max_{x \in A} f(x)\,,$$

niin se on funktion f <u>suurin</u> <u>arvo</u>.

Siis M on funktion f suurin arvo, jos ja vain jos
(1) $f(x) \leq M$ kaikilla $x \in A$,
(2) $f(x) = M$ jollakin $x \in A$.

Vastaavasti määritellään funktion f pienin arvo

$$\min f(A) = \min\{f(x)|x \in A\} = \min_{x \in A} f(x)\,.$$

Esimerkki. $A = (0, 1)$ *ja* $f(x) = x$. *Nyt funktiolla* f *ei ole suurinta eikä pienintä arvoa joukossa* A.

Huomautus. *Jos* $\exists \max f(A)$, *niin* f *on ylhäältä rajoitettu ja*

$$\max f(A) = \sup\{f(x)|x \in A\}\,.$$

Jos $\exists \min f(A)$, *niin* f *on ylhäältä rajoitettu ja*

$$\min f(A) = \inf\{f(x)|x \in A\}\,.$$

Seuraava Lause on erittäin tärkeä!

Weierstrassin min-max -lause. *Jos* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva, niin funktiolla* f *on suurin ja pienin arvo.*

Todistus. Osoitetaan, että on olemassa suurin arvo. Pienin seuraa tästä funktion $-f$ avulla.

<u>Väite 1:</u> f on rajoitettu. Tehdään vastaväite: f ei ole rajoitettu. Siis $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in [a, b]$, jolla $|f(x_n)| \geq n$.

Koska $x_n \in [a, b]$, niin (x_n) on rajoitettu jono. Bolzano-Weierstrass-teoreeman mukaan jonolla (x_n) on suppeneva osajono $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ Siis $x_{n_k} \to x_0$, kun $n \to \infty$.

Nyt $a \leq x_{n_k} \leq b$ kaikilla k. Siis $a \leq x_0 \leq b$.

Huomaa, että todistus menisi tässä metsään, jos väli olisi avoin! Muista Epäyhtälön säilymisen periaate, Lause 4.5.

Koska f on jatkuva pisteessä x_0, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < 1\,, \text{ kun } x \in U(x_0, \delta) \cap [a, b]\,.$$

Koska $x_{n_k} \to x_0$, niin on olemassa k_0 s.e.

$$|x_{n_k} - x_0| < \delta\ , \text{ kun } k \geq k_0\,.$$

Näillä k on

$$|f(x_{n_k}) - f(x_0)| < 1\,.$$

Toisaalta kuitenkin $|f(x_{n_k})| \geq n_k \to \infty$, kun $k \to \infty$. Saimme siis ristiriidan. Antiteesi on siis väärä ja alkuperäinen väitös on näin ollen oikea.

Väitteestä 1 seuraa, että on olemassa

$$\sup\{f(x)|x \in [a,b]\} =: M.$$

<u>Väite 2:</u> $f(x) = M$ jollakin $x \in [a,b]$.

Todistus: $\forall n \in \mathbb{N}$ on olemassa $y_n \in [a,b]$, jolle $f(y_n) > M - 1/n$. Bolzano-Weierstrass-teoreemasta seuraa, että on olemassa suppeneva osajono (y_{n_k}), $y_{n_k} \to y_0 \in [a,b]$, kun $k \to \infty$.

Koska f on jatkuva, niin $f(y_{n_k}) \to f(y_0)$, kun $k \to \infty$.

Toisaalta $f(y_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k} \geq M - \frac{1}{k}$, sillä $n_k \geq k$.

Kun $k \to \infty$, niin $f(y_0) \geq M - 0 = M$.

Siis $f(y_0) = M$.

Esimerkki. *Osoita, että funktio f,*

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}\,,$$

saavuttaa $\mathbb{R}$:ssä suurimman ja pienimmän arvonsa.

Ratkaisu: Nyt ei voida soveltaa suoraan Weierstrassin min-max *-lausetta.*

Toteamme ensin, että f on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä, ja että

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \text{ ja } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,.$$

Lisäksi $f(1) = 1/2$ ja $f(-1) = -1/2$. Koska

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad ja \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,,$$

niin voidaan valita niin suuri väli $[-a,a]$, että sen ulkopuolella $|f(x)| < 1/2$. Weierstrassin min-max *-lauseen perusteella suljetulla välillä $[-a,a]$ saatujen funktion f arvojen joukossa on suurin ja pienin arvo, eli on olemassa*

$$M = \max_{x\in[-a,a]} f(x) \quad ja \qquad m = \min_{x\in[-a,a]} f(x)\,.$$

Edellä olevan perusteella $M \geq 1/2$ ja $m \leq -1/2$. Koska välin $[-a,a]$ ulkopuolella $-1/2 < f(x) < 1/2$, niin on olemassa

$$M = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x) \quad ja \qquad m = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x)\,.$$

Lause 6.9. *Olkoon Δ väli ja $f : \Delta \to \mathbb{R}$ aidosti kasvava. Tällöin f on injektio ja f määrittelee siis bijektion $f_1 : \Delta \to f\Delta$.*

Jos lisäksi f on jatkuva, niin $f\Delta$ on väli, ja $f_1^{-1} : f\Delta \to \Delta$ on jatkuva ja aidosti kasvava.

Todistus. Jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_2)$, koska f on aidosti kasvava. Siis f on injektio. Alkuosa lauseesta on selvä.

Olkoon f jatkuva. Merkitään nyt, että

$$g = \inf\{f(x)|x \in \Delta\}, \text{ jos } f \text{ alhaalta rajoitettu; muutoin } g = -\infty\,.$$

$$G = \sup\{f(x)|x \in \Delta\}, \text{ jos } f \text{ ylhäältä rajoitettu; muutoin } G = \infty\,.$$

Jos f on rajoitettu, niin $f\Delta \subset [g, G]$. Jos $g = -\infty$ tai $G = \infty$, niin tällöin vastaava hakasulkumerkki on käännettävä.

Väite 1: $]g, G[\subset f\Delta$.

Todistus: Olkoon $g < y < G$. Valitaan $y_1, y_2 \in f\Delta$ s.e. $g < y_1 < y < y_2 < G$. On olemassa x_1, x_2, joille $f(x_1) = y_1$ ja $f(x_2) = y_2$. Koska f on kasvava, niin $x_1 < x_2$. Bolzanon seurauslauseen nojalla on olemassa $x \in]x_1, x_2[$, jolle $f(x) = y$. Siis $y \in f\Delta$. Siis väite 1 on todistettu ja siis $]g, G[\subset f\Delta \subset [g, G]$.

Jälkimmäinen: $f\Delta$ ei voi sisältää lukuja, jotka ovat pienempiä kuin g tai suurempia kuin G. Siis $f\Delta$ on jokin väleistä $(g, G), (g, G], [g, G), [g, G]$. Huomaa korjaus tapauksissa: ∞ ja $-\infty$. Siis $f\Delta = \Delta'$ väli.

Lisäksi toteamme vielä, että

$$G \in \Delta' \Longleftrightarrow b \in \Delta \quad \text{ja} \quad f(b) = G\,,$$

ja

$$g \in \Delta' \Longleftrightarrow a \in \Delta \quad \text{ja} \quad f(a) = g\,,$$

Koska Δ on alhaalta rajoitettu ja siinä on olemassa pienin luku a, on $g = f(a)$. Siis $g \in \Delta'$.

Koska Δ on ylhäältä rajoitettu ja siinä on olemassa suurin luku b, niin on $G = f(b)$. Siis $G \in \Delta'$.

Joka tapauksessa siis pätee, että $f\Delta = \Delta'$.

Siis $f_1 : \Delta \to \Delta'$ on bijektio ja on olemassa $h = f_1^{-1} : \Delta' \to \Delta$.

Väite 2: h on aidosti kasvava. Tehdään vastaväite: On olemassa $y_1, y_2 \in \Delta'$, $y_1 < y_2$, $h(y_1) \geq h(y_2)$. Koska f on kasvava, niin $f(h(y_1)) \geq f(h(y_2))$ eli $y_1 \geq y_2$. RR. Siis h on aidosti kasvava.

Väite 3: h on jatkuva. Todistus: Olkoon $y \in \Delta'$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Merkitään $x_0 = h(y_0)$, jolloin $f(x_0) = y_0$. Oletetaan, että x_0 ei ole päätepiste. Pienentämällä lukua ϵ voidaan olettaa, että $U(x_0, \epsilon) \subset \Delta$. Alkuosasta seuraa, että $fU(x_0, \epsilon)$ on avoin väli. Siis on olemassa $\delta > 0$, jolla $U(x_0, \delta) \subset fU(y_0, \epsilon)$. Tämä δ on haettu, sillä

$$\begin{aligned}
&|y - y_0| < \delta \Longrightarrow y \in fU(x_0, \epsilon) \\
&\Longrightarrow y = f(x) \text{ jollakin } x \in U(x_0, \epsilon) \\
&\Longrightarrow x = h(y) \in U(x_0, \epsilon)\,.
\end{aligned}$$

Siis h on jatkuva pisteessä y_0. Jos x_0 on välin Δ päätepiste, niin todistus on melkein sama, huomaa vain toispuoleinen ympäristö.

Huomautuksia. *(1) Vastaava lause pätee myös pieneneville funktioille.*

(2) Huomaa, että käyrät $\Gamma_1 : y = f(x)$ ja $\Gamma_2 : y = f^{-1}(x)$ ovat symmetriset suoran $y = x$ suhteen. (Piirrä kuva!)

Funktio $\sqrt[n]{x}$. Merkitään $\Delta = [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $f : \Delta \to \Delta$, $f(x) = x^n$. Funktio f on jatkuva ja aidosti kasvava ja $f(0) = 0$ ja $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Aito kasvu:

$$0 \le x_1 < x_2 \Longrightarrow 0 \le x_1^n < x_2^n\,.$$

Edellisestä lauseesta seuraa, että $f : \Delta \to \Delta$ on bijektio ja on olemassa aidosti kasvava, jatkuva käänteisfunktio $f^{-1} : \Delta \to \Delta$. Merkitsemme tätä $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Lause 6.10. *Funktio $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ on jatkuva ja aidosti kasvava välillä $[0, \infty)$ ja $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = \infty$.*

Huomaa, että $1^n = 1$ ja siis $\sqrt[n]{1} = 1$.

Huomautuksia. *(1) Jos n on pariton, niin f on aidosti kasvava koko $\mathbb{R}$:ssä ja jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä ja $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Aito kasvu välillä $(-\infty, 0]$, kun n pariton:*

$$\begin{aligned}
&x_1 < x_2 \le 0 \Longrightarrow 0 \le -x_2 < -x_1\\
&0 \le (-x_2)^n < (-x_1)^n \Longrightarrow 0 \le -x_2^n < -x_1^n\\
&x_1^n < x_2^n \le 0\,.
\end{aligned}$$

Siis funktiolla f on jatkuva, aidosti kasvava käänteisfunktio, joka on määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä ja jota merkitään $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska $(-\sqrt[n]{x})^n = -x$, niin $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

(2) Jos n on parillinen, niin f on aidosti pienenevä välillä $(-\infty, 0]$ ja se määrittelee bijektion $f_1 : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$, $f_1^{-1}(y) = -\sqrt[n]{y}$.

Koska $(-x)^n = x^n$, niin itse f ei ole nyt bijektio.

(3) Kun kirjoitetaan $\sqrt[n]{x}$, niin sillä tarkoitetaan:

Positiivista lukua, kun $x > 0$.
Nollaa, kun $x = 0$.
Negatiivista lukua, kun $x < 0$ ja n pariton.
Ei mitään, kun $x < 0$ ja n parillinen.

Huomautus. *Bijektiota f sanotaan homeomorfismiksi, jos sekä f että f^{-1} ovat jatkuvia.*

7. FUNKTION DIFFERENTIOITUVUUDESTA

Funktion derivaatta. Olkoon reaalifunktio f määritelty pisteen x_0 jossain ympäristössä $U(x_0, r)$. Funktio f on derivoituva pisteessä x_0, jos on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)\,.$$

Lauseketta $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $(= \frac{\Delta f}{\Delta x})$ sanotaan erotusosamääräksi, ja sen raja-arvoa, $f'(x_0)$, mikäli se on olemassa, sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä x_0. Derivaattaa pisteessä x_0, $f'(x_0)$, merkitään myös $Df(x_0)$ tai $\frac{df}{dx}(x_0)$. Derivaatta voidaan määritellä yhtäpitävästi myös raja-arvona

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Esimerkkejä.

(1) Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = x^2$. Silloin

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 \quad \text{ja}$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x + h \to 2x\,, \text{ kun } h \to 0\,.$$

Tästä seuraa, että on olemassa $f'(x) = 2x$ kaikilla x, eli

$$Df(x) = 2x, \text{ eli}$$
$$Dx^2 = 2x$$
$$f'(1) = 2 \text{ eli } Dx^2\Big|_1 = 2\,.$$

(2) Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = |x|$. Onko $f'(0)$ olemassa?

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, \text{ kun } h > 0. \\ -1, \text{ kun } h < 0. \end{cases}$$

Siis $f'(0)$ ei ole olemassa. Sen sijaan,

kun $x > 0$, on olemassa $f'(x) = 1$ ja

kun $x < 0$, on olemassa $f'(x) = -1$.

Toispuoleiset derivaatat. Funktion f oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä x_0 määritellään raja-arvona

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,,$$

mikäli raja-arvo on olemassa ja äärellinen. (Tässä siis lisäys h rajoitetaan positiivisiin arvoihin.)

Vastaavasti määritellään funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

Välittömästi todetaan, että f on derivoituva pisteessä x_0 aina ja vain kun $f'_+(x_0)$ ja $f'_-(x_0)$ ovat olemassa ja $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Karakterisaatiolause 7.1. *Funktio f on derivoituva pisteessä x_0 (ja $f'(x_0) = A$), aina ja vain kun funktion f lisäys voidaan kirjoittaa muotoon*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \epsilon(h)h,$$

missä A on reaaliluku, joka ei riipu luvusta h ja $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.

Todistus. $\Longrightarrow$: Koska $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, niin voidaan kirjoittaa

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \epsilon(h), \text{ kun } h \neq 0 \text{ ja } \epsilon(0) = 0\,,$$

missä $\epsilon(h) \to 0$ kun $h \to 0$. Tästä seuraa, että

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \epsilon(h) \cdot h\,,$$

ja merkitsemällä nyt $f'(x_0) = A$, saadaan haluttu esitysmuoto.

$\Longleftarrow$: Jos funktiolla f on esitysmuoto $f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \epsilon(h)h$, niin

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \epsilon(h)\,.$$

Koska $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$, saadaan

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A.$$

Funktio f on siis derivoituva pisteessä x_0 ja $f'(x_0) = A$.

Huomautus. Edellisessä karakterisaatiolauseessa on funktion f lisäys $f(x_0+h)-f(x_0)$ jaettu kahteen osaan. Tärkeämpi osa, $f'(x_0)h$, on ns. funktion f differentiaali pisteessä x_0. Termi $\epsilon(h)h$ on taas niin sanottu korjaustermi.

Huomautuksia. (1) Olkoon funktio f määritelty pisteen x_0 ympäristössä. Jos f on derivoituva pisteessä x_0, on se myös jatkuva pisteessä x_0. Nimittäin karakterisaatiolauseen (7.1) mukaan

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \epsilon(h)h \to A \cdot 0 + 0 \cdot 0, \text{ kun } h \to 0,$$

joten

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \quad \text{eli} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

(2) Jatkuvan funktion ei tarvitse olla derivoituva. Esimerkiksi, funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, on f jatkuva, mutta kuten Esimerkissä (2) osoitimme, ei ole olemassa $f'(0)$:ta. Sen voi todeta myös laskemalla $f'_+(0) = 1$ ja $f'_-(0) = -1$. Laske tarkasti! Ja siis f ei ole derivoituva origossa.

Derivaatan geometrinen tulkinta. Erotusosamäärä

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

on funktion kuvaajan pisteiden $P = (x_0, f(x_0))$, ja $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin. Piirrä Kuva!

Derivaatta $f'(x_0)$ on tämän suoran kulmakertoimen raja-arvo, kun $h \to 0$. Raja-arvona saatua suoraa sanotaan kuvaajan pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ piirretyksi tangentiksi. Tangentin kulmakerroin on $f'(x_0)$, joten tangentin yhtälö on

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ y &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \end{aligned}$$

Lause 7.2. Rationaaliset derivoimissäännöt. Pisteessä x derivoituville funktioille f ja g on voimassa:

(1) $D(\text{vakiofunktio}) = 0\,,$

(2) $D(f+g)(x) = f'(x) + g'(x)\,,$

(3) $D(cf)(x) = cf'(x),$ missä c on reaalinen vakio,

(4) $D(fg)(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\,,$

(5) $D(\frac{f}{g})(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}$, missä $g(x) \neq 0\,.$

Todistus. (1): Jos $f(x) = c$, missä c on reaalinen vakio, niin

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0, \text{ joten } f'(x) = 0.$$

(2):

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\Big(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big) = f'(x)+g'(x)$$

(3):

$$\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = cf'(x)$$

(4): Merkitään

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)\,.$$

Silloin

$$\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} = \frac{(f(x)+\Delta f)(g(x)+\Delta g)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$
$$= f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g$$
$$\to f(x)g'(x) + g(x)f'(x) + f'(x)\cdot 0 = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\,,$$

kun $\Delta x \to 0$, sillä funktion g jatkuvuuden perusteella $\Delta g \to 0$, kun $\Delta x \to 0$.
(5): Koska $g(x) \neq 0$ ja g on jatkuva, niin $g(x) \neq 0$ jossain pisteen x ympäristössä $U(x,r)$. Tästä seuraa, että $\frac{f}{g}$ on määritelty ympäristössä $U(x,r)$.

$$\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\Big(\frac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)}\Big)$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\Big(\frac{(f(x)+\Delta f)g(x) - f(x)(g(x)+\Delta g)}{g(x)(g(x)+\Delta g)}\Big)$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\Big(\frac{f(x)g(x)+\Delta f g(x) - f(x)g(x) - f(x)\Delta g}{g(x)(g(x)+\Delta g)}\Big)$$
$$= \frac{g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)(g(x)+\Delta g)}$$
$$\to \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2},$$

kun $\Delta x \to 0$.

Derivoituvuusesimerkkejä. (1) Identtisen funktion $f(x) = x$ derivaatta on joka pisteessä 1, siis $Dx = 1$, sillä

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

jokaisella h, joten myös raja-arvo on 1.
(2) Potenssifunktion x^n derivaatta pisteessä x on $nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$. Kaava pätee arvoilla $n = 0$ ja $n = 1$; vakiofunktio ja identtinen funktio. Todistetaan kaava positiivisille n:n arvoille induktiolla. Oletetaan siis, että on voimassa:

$$Dx^k = kx^{k-1}.$$

Silloin induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned} &D(x^{k+1}) = D(x^k x) = D(x^k)x + D(x)x^k \\ &= kx^{k-1} \cdot x + 1 \cdot x^k = (k+1)x^k = (k+1)x^{(k+1)-1}. \end{aligned}$$

Eli väite pätee myös arvolla $n = k + 1$. Näin ollen se pätee myös kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
(3)

$$D(f^2) = D(f \cdot f) = f'(x)f(x) + f'(x)f(x) = 2f(x)f'(x),$$

josta täydellisellä induktiolla seuraa, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on

$$D(f^n) = D(f(x)^n) = nf(x)^{n-1}f'(x).$$

Lause 7.3. Yhdistetyn funktion derivoimissääntö eli ketjusääntö. Olkoon f määritelty pisteen x ympäristössä ja g määritelty $f(x)$:n ympäristössä. Olkoon funktio f derivoituva pisteessä x ja funktio g derivoituva pisteessä $f(x)$. Silloin yhdistetty funktio $g \circ f$ on derivoituva pisteessä x ja

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Todistus. Olkoon $y = f(x)$. Karakterisaatiolauseen nojalla

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\epsilon_1(h),$$

missä $\epsilon_1(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Merkitään $k = f'(x)h + h\epsilon_1(h)$, jolloin

$$f(x+h) = y + k,$$

ja siis

$$(g \circ f)(x+h) = g(f(x+h)) = g(y+k) = g(y) + g'(y)k + k\epsilon_2(k)$$

missä $\epsilon_2(k) \to 0$, kun $k \to 0$.
Siis

$$\begin{aligned} &(g \circ f)(x+h) = g(y) + g'(y)(f'(x)h + h\epsilon_1(h)) + (f'(x)h + h\epsilon_1(h))\epsilon_2(k) \\ &= g(y) + g'(y)f'(x)h + g'(y)h\epsilon_1(h) + (f'(x)h + h\epsilon_1(h))\epsilon_2(k) \\ &= (g \circ f)(x) + g'(y)f'(x)h + h\epsilon_3(h), \end{aligned}$$

jossa $\epsilon_3(h) = g'(y)\epsilon_1(h) + f'(x)\epsilon_2(k) + \epsilon_1(h)\epsilon_2(k)$. Kun $h \to 0$, niin $\epsilon_1(h) \to 0$, ja siis $k \to 0$, sillä f on jatkuva pisteessä x, ja siten $\epsilon_2(k) \to 0$ ja siis $\epsilon_3(h) \to 0$.

Huomautuksia. (1) Edellisen lauseen funktiosta g käytetään joskus nimitystä ulkofunktio. Funktiosta f taas käytetään nimitystä sisäfunktio.
(2) Edellisen esimerkin kaava $D(f(x)^n) = nf(x)^{n-1}f'(x)$ saadaan myös ketjusäännön avulla valitsemalla ulkofunktioksi $g(y) = y^n$. Siis

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = f(x)^n\,,\\ (g \circ f)'(x) &= g'(f(x))f'(x) = nf(x)^{n-1}f'(x)\,.\end{aligned}$$

(3) Jos yhdistetyn funktion ketjusäännössä valitaan $g = f^{-1}$ (mikäli f^{-1} on olemassa) ja oletetaan, että g on derivoituva pisteessä $f(x) = y$, niin koska

$$g \circ f(x) = f^{-1} \circ f(x) = x\,,$$

saadaan ketjusäännöstä, että

$$\begin{aligned}&(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)\\ &= (f^{-1})'(y)f'(x) = 1\,,\end{aligned}$$

eli

$$(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)}\,,$$

jos $f'(x) \neq 0$.

Käänteisfunktion derivaatta pisteessä $y = f(x)$ on siis alkuperäisen funktion derivaatan käänteisluku pisteessä x. Seuraava lause osoittaa, että funktion f^{-1} derivoituvuutta ei tarvitse olettaa vaan se seuraa automaattisesti funktion f derivoituvuudesta. Huomaa, että aikaisemmin todistimme, että funktion f^{-1} jatkuvuus seuraa funktion f jatkuvuudesta.

Lause 7.4. Käänteisfunktion derivoimissääntö. *Olkoon Δ väli, $f : \Delta \to \mathbb{R}$ aidosti monotoninen ja jatkuva funktio. Olkoon $x \in \Delta$ sisäpiste ja oletetaan, että $f'(x)$ olemassa, siten, että $f'(x) \neq 0$.*

Tällöin käänteisfunktiolla $g = f^{-1} : f\Delta \to \Delta$ on pisteessä $y = f(x)$ derivaatta

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

eli

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Todistus. Valitaan $k \neq 0$ siten, että $g(y + k)$ on määritelty.

Merkitään

$$h = g(y + k) - g(y)\,,$$

jolloin

$$h = g(y + k) - x\,,$$

ja siis

$$g(y + k) = x + h\,,$$

missä $h \neq 0$. Siis

$$\begin{aligned} y + k &= f(x+h) \\ k &= f(x+h) - y \\ k &= f(x+h) - f(x). \end{aligned}$$

Silloin

$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h)-f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}\,.$$

Kun $k \to 0$, niin

$$h = g(y+k) - g(y) \to 0\,,$$

koska g on jatkuva [Myrberg 3.9.1, yksi jatkuvuuden suurista lauseista].

On siis olemassa

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Huomautus. Tangentin kulmakerroin vaihtuu käänteisluvuksi, kun akselien roolit vaihdetaan keskenään, $y = f(x)$ ja $x = g(y)$. Piirrä kuva!

Korkeammat derivaatat. Jos funktiolla f on välin Δ jokaisessa pisteessä derivaatta, on tämä f' jälleen x:n funktio: $x \mapsto f'(x)$. Tätä funktiota sanotaan funktion f derivaattafunktioksi. Jos funktion f derivaattafunktiolla f' on derivaatta pisteessä x, sanotaan tätä funktion f toiseksi derivaataksi tai toisen kertaluvun derivaataksi pisteessä x ja merkitään

$$f''(x) = D^{(2)}f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)\,.$$

Yleisesti, funktion n:nnen kertaluvun derivaatta pisteessä x, mikäli se on olemassa, määritellään funktion $(n-1)$:nnen derivaatan derivaattana pisteessä x, ja sille käytetään merkintää

$$f^{(n)}(x) = D^{(n)}f(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)\,.$$

8. DIFFERENTIAALILASKENNAN PERUSLAUSEITA

Huomautus. Nämä ovat syksyn tärkeimpiä asioita!

Reaalifunktio f on derivoituva avoimella välillä (a,b), jos se on derivoituva välin (a,b) jokaisessa pisteessä. Reaalifunktio f on derivoituva suljetulla välillä $[a,b]$, jos se on derivoituva avoimella välillä (a,b), ja jos on olemassa $f'_+(a)$ ja $f'_-(b)$.

Todistamme seuraavassa muutamia differentiaalilaskennan tärkeimpiä tuloksia. Perusajatus on se, että $f'(x_0)$ kertoo funktion f ”suunnan” pisteessä x_0.

Lemma 8.1. (a) Olkoon $f'(x_0) > 0$. Tällöin on olemassa $\sigma > 0$ siten, että

$$f(x) > f(x_0), \text{ kun } x_0 < x < x_0 + \sigma$$

ja

$$f(x) < f(x_0), \text{ kun } x_0 - \sigma < x < x_0\,.$$

(b) Olkoon $f'(x_0) < 0$. Tällöin on olemassa $\sigma > 0$ siten, että

$$f(x) < f(x_0), \text{ kun } x_0 < x < x_0 + \sigma$$

ja

$$f(x) > f(x_0), \text{ kun } x_0 - \sigma < x < x_0\,.$$

Todistus. (a) Katso kirja [Myrberg, Lause 5.2.1].
(b)

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0.$$

Silloin on olemassa $\sigma > 0$ siten, että

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0\,,$$

kun $0 < |x - x_0| < \sigma$. Jos

$$0 < x - x_0 < \sigma \quad \text{eli} \quad x_0 < x < \sigma + x_0\,,$$

niin

$$f(x) - f(x_0) < 0\,.$$

Jos

$$-\sigma < x - x_0 < 0 \quad \text{eli} \quad x_0 - \sigma < x < x_0\,,$$

niin

$$f(x) - f(x_0) > 0\,.$$

Varoitus. Lemmassa 8.1 ei funktion f tarvitse olla kasvava missään pisteen x_0 ympäristössä, vaikka pätisikin, että $f'(x_0) > 0$. Esimerkiksi,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + \frac{x}{2}, \text{ kun } x \neq 0 \\ 0, \text{ kun } x = 0\,, \end{cases}$$

mutta f ei ole kasvava missään pisteen $x_0 = 0$ ympäristössä, vaikka nyt päteekin, että $f'(0) > 0$. Katso myös Laskuharjoitustehtävät 12.9 ja 12.10.

Korollaari 8.2. Olkoon Δ väli ja $f : \Delta \to \mathbb{R}$ ja
(1) f saa suurimman tai pienimmän arvonsa pisteessä $x_0 \in \Delta$,
(2) x_0 ei ole välin päätepiste,
(3) on olemassa $f'(x_0)$.
Silloin $f'(x_0) = 0$.

Todistus. Voidaan olettaa, että f saa maksiminsa pisteessä x_0. Jos $f(x_0)$ olisi minimi, niin tällöin tutkittaisiin funktiota $-f$.

(1) Jos $f'(x_0) > 0$, niin Lemman 8.1 mukaan on olemassa x siten, että

$$x_0 < x < x_0 + \sigma\,,$$

ja

$$f(x) > f(x_0)\,,$$

mutta tämä on ristiriita.

(2) Jos $f'(x_0) < 0$, niin Lemman 8.1 mukaan silloin on olemassa x siten, että

$$x_0 - \sigma < x < x_0\,,$$

ja

$$f(x) > f(x_0)\,,$$

mutta tämä on ristiriita.

Huomautus. Seuraava EI päde: $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f$ saa pisteessä x_0 suurimman tai pienimmän arvonsa.

Esimerkki. Olkoon $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3\,, \quad x \in [-5, 5] \\ f'(x) &= 3x^2 \\ f'(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Rollen lause. *Olkoon f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä (a, b) ja olkoon $f(a) = f(b)$. Tällöin on olemassa ainakin yksi piste $\xi \in (a, b)$ siten, että $f'(\xi) = 0$.*

Huomaa: Koska f on derivoituva välillä (a, b), niin f on jatkuva välillä (a, b). Siis jatkuvuusoletukseksi riittäisi: f on jatkuva välin päätepisteissä.

Rollen lauseen todistus.

(1) Olkoon ensin

$$f(x) = f(a) = f(b) \text{ kaikilla } x \in [a, b]\,.$$

Silloin

$$f'(x) = 0 \text{ kaikilla } x,$$

eli mikä tahansa välin (a, b) piste kelpaa luvuksi ξ.

(2) Voidaan siis olettaa, että f saa muitakin arvoja kuin $f(a)$. Oletetaan, että $f(x) > f(a) = f(b)$ jollakin $x \in [a, b]$. Silloin Weierstrassin min-max -teoreeman mukaan on olemassa $\xi \in [a, b]$ siten, että f saa pisteessä ξ suurimman arvonsa.

Siis

$$f(\xi) \geq f(x) > f(a) = f(b)\,,$$

joten $a < \xi < b$ ja edelleen $f'(\xi) = 0$.

Oletetaan sitten, että $f(x) < f(a)$ jollakin x. Vastaavasti kuin edellä, nyt on olemassa ξ, jossa f saa pienimmän arvonsa, ja $f'(\xi) = 0$.

Differentiaalilaskennan väliarvolause (DVAL).

Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jatkuva suljetulla välillä* $[a,b]$ *ja derivoituva avoimella välillä* (a,b). *Silloin on olemassa ainakin yksi piste* $\xi \in (a,b)$ *siten, että*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Huomautus. DVAL on differentiaalilaskennan käyttökelpoisin lause!

Huomautus. Geometrisesti tulkittuna Rollen lause takaa (tehdyin oletuksin), että jos funktion päätepisteille pätee, että $f(a) = f(b)$, niin välillä on olemassa ainakin yksi piste, jossa kuvaajan tangentti on x-akselin suuntainen. DVAL vastaavasti takaa ainakin yhden tangentin, joka on kuvaajan päätepisteet yhdistävän suoran suuntainen. Rollen lause saadaan siis erikoistapauksena DVAL:sta.

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen todistus.

Olkoon L funktio, jonka graafi eli kuvaaja on suora viiva, joka yhdistää pisteet $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$. Nyt $L(a) = f(a)$ ja $L(b) = f(b)$ ja

$$L'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

kaikilla x.

Väite saadaan palautetuksi Rollen lauseeseen tarkastelemalla $f(x)$:n ja pisteet $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ yhdistävän sekantin erotusta

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right),$$

missä

$$L(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,,$$

eli

$$g(x) = f(x) - L(x)$$

kaikilla $x \in [a,b]$. Silloin g on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä (a,b). Koska $g(a) = 0 = g(b)$, niin on olemassa $\xi \in (a,b)$ siten, että $g'(\xi) = 0$. Tälle ξ pätee, että

$$f'(\xi) = L'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Esimerkki. Olkoon f derivoituva suljetulla välillä $[0,5]$ ja olkoon $f(0) = 2$ ja $|f'(x)| \leq 6$, kun $x \in (0,5)$. Minkä rajojen väliin saadaan näiden ehtojen nojalla $f(5)$?

Ratkaisu: Ensinnäkin f on derivoituva välillä $[0,5]$ (siis erityisesti jatkuva välillä $[0,5]$). Silloin DVAL:n nojalla on olemassa ainakin yksi piste $\xi \in (0,5)$ siten, että

$$f'(\xi) = \frac{f(5)-f(0)}{5-0}\,.$$

Tällöin oletusten nojalla

$$-6 \leq \frac{f(5)-f(0)}{5} = \frac{f(5)-2}{5} \leq 6\,,$$

siis

$$-30+2 \leq f(5) \leq 30+2$$

eli

$$-28 \leq f(5) \leq 32\,.$$

Cauchyn yleistetty väliarvolause. *Olkoon $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuvia suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituvia avoimella välillä (a, b). Silloin on olemassa $\xi \in (a, b)$ siten, että*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)\,.$$

Todistus. Määritellään $h : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Funktio h on jatkuva välillä $[a, b]$. Olkoon $a < x < b$. Silloin on olemassa

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)\,.$$

Lisäksi $h(b) = h(a)$, sillä

$$\begin{aligned} h(a) &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) \\ h(b) &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b)\,. \end{aligned}$$

Rollen lauseen perusteella on olemassa ξ, jossa $h'(\xi) = 0$, mistä väite seuraa.

Huomautuksia. (1) Analyyttisesti Rollen lause saadaan DVAL:sta valitsemalla $f(a) = f(b)$.
(2) DVAL saadaan Cauchyn yleistetystä väliarvolauseesta valitsemalla g siten, että $g(x) = x$ kaikilla x, jolloin $g'(x) = 1$.
(3) Tärkeä huomautus! Käytännössä differentiaalilaskennan väliarvolausetta käytetään usein myös seuraavasti:

Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b). Olkoon $x \in (a, b]$. Silloin on olemassa $\xi_x \in (a, x)$ siten, että

$$f(x) = f(a) + f'(\xi_x)(x - a)\,,$$

missä $a < \xi_x < x \leq b$. Huomaa, että ξ_x riippuu pisteestä x.

Integraalilaskennan peruslause. *Tämän lauseen tärkeys näkyy kevään Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2 -kurssilla!*

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in (a, b)$. Silloin f on vakiofunktio.

Todistus. Olkoon $a < x \leq b$. Sovelletaan DVAL:tta välillä $[a, x]$, jolloin on olemassa $\xi \in (a, x)$ siten, että

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) = 0$$

ja siis

$$f(x) = f(a)$$

kaikilla $x \in [a, b]$.

Integraalilaskennan peruslauseen korollaari 8.3. Tämä korollaari on tärkeä kevään kurssilla Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2.

Välillä $[a,b]$ derivoituville funktioille f ja g on voimassa

$$f'(x) = g'(x)$$

kaikilla $x \in [a,b]$, jos ja vain jos

$$f(x) = g(x) + C$$

kaikilla $x \in [a,b]$, missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio.

Todistus. Sovelletaan Integraalilaskennan peruslausetta funktioon $f-g$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.

Väliarvoepäyhtälö 8.4. *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että (1) f on jatkuva,*
(2) f on derivoituva avoimella välillä (a,b),
(3) $f'(x) \le M$ kaikilla $x \in (a,b)$.
Tällöin

$$f(b) - f(a) \le M(b-a)\,.$$

Jos lisäksi $|f'(x)| \le M$, niin

$$|f(b) - f(a)| \le M(b-a)\,.$$

Todistus. Tulos seuraa suoraan DVAL:sta.

Virhearvio. Mitataan kulma φ, ja saadaan sen likiarvoksi 25.1^o. Merkitään tätä symbolilla α. Tiedetään mittaustarkkuus:

$$|\varphi - \alpha| \le 0.1^o =: h\,.$$

Kysymys: Kuinka suuri voi $\tan\varphi$:n virhe olla?
Ratkaisu: Ratkaistaan tehtävä nyt Väliarvolauseen avulla, vaikka on olemassa muitakin tapoja. Haetaan arvio lausekkeelle $|\Delta|$, missä $\Delta = \tan\varphi - \tan\alpha$. DVAL:sta seuraa, että

$$|\Delta| = |D\tan\mu||\varphi - \alpha|\,,$$

jollakin $\mu \in (\alpha - h, \alpha + h)$. Tässä on

$$|D(\tan\mu)| = \frac{1}{\cos^2\mu} \le \frac{1}{\cos^2 25.2^o}\,,$$

sillä $t \mapsto \cos t$ on vähenevä välillä $[0,\pi]$ ja

$$\begin{aligned}\cos\mu &\ge \cos(\alpha + h)\\ &= \cos 25.2^o\,.\end{aligned}$$

siis

$$\Delta \le \frac{1}{\cos^2 25.2^o}\frac{0.1}{180}\pi = 0.002132\ldots \approx 0.002. \text{ Eli noin 0.2 prosenttia.}$$

Merkintä. Jos $\Delta \subset \mathbb{R}$ on väli, merkitsemme

$$\mathrm{int}\Delta = \{x | x \text{ on } \Delta\text{:n sisäpiste}\}.$$

Piste x on välin Δ sisäpiste, jos on olemassa $\sigma_x > 0$ siten, että $U(x, \sigma_x) \subset \Delta$.

Seuraava tulos on hyödyllinen:

Lause 8.5. (Kasvavuuslause). *Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli ja olkoon $f : \Delta \to \mathbb{R}$ jatkuva välillä Δ ja derivoituva kaikilla $x \in \mathrm{int}\,\Delta$. Silloin f on kasvava, joss*

$$f'(x) \geq 0$$

kaikilla $x \in \mathrm{int}\,\Delta$.

Todistus. $\Longrightarrow$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

kaikilla x.

$\Longleftarrow$: Olkoot $y, z \in \Delta\,, y < z$.

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa $\mu \in (y, z)$ siten, että

$$\begin{aligned} & f(z) - f(y) = f'(\mu)(z - y) \geq 0 \\ & \Longrightarrow f(z) \geq f(y)\,. \end{aligned}$$

Siis funktio f on kasvava.

Lause 8.6. (Aidon kasvavuuden lause). *Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli ja olkoon $f : \Delta \to \mathbb{R}$ jatkuva välillä Δ ja derivoituva kaikilla $x \in \mathrm{int}\,\Delta$.*

Silloin f on aidosti kasvava, joss

$$f'(x) \geq 0$$

kaikilla $x \in \mathrm{int}\,\Delta$ ja ei ole olemassa väliä $\Delta_1 \subset \Delta$, jossa $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in \Delta_1$.

Todistus. $\Longrightarrow$: Kasvavuuslauseesta seuraa, että $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \Delta$. Jos on olemassa Δ_1, jossa $f'(x) = 0$, niin integraalilaskennan peruslauseen nojalla $f\Big|_{\Delta_1}$ on vakio, joten f ei ole aidosti kasvava.

$\Longleftarrow$: Kasvavuuslauseesta seuraa, että f on kasvava. Jos f ei ole aidosti kasvava, niin on olemassa $y < z$ siten, että $f(y) = f(z)$. Silloin $f\Big|_{[y,z]}$ on vakio (koska f on kasvava), jolloin $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in]y, z[= \Delta_1$, mutta tämä on ristiriita. Siis f on aidosti kasvava.

Ääriarvot. Olkoon f määritelty pisteen x_0 ympäristössä. Tällöin x_0 on funktion f lokaali maksimikohta, jos on olemassa pisteen x_0 ympäristö $U(x_0, r)$ siten, että

$$f(x_0) = \max\{f(x) | x \in U(x_0, r)\}$$

eli $f(x) \leq f(x_0)$ kaikilla $x \in U(x_0, r)$. Silloin $f(x_0)$ on funktion f lokaali maksimiarvo.

Vastaavasti määritellään lokaali minimikohta ja lokaali minimiarvo. Yhteisnimitykset ovat lokaali ääriarvokohta ja lokaali ääriarvo. Piste x_0 on olennainen (oleellinen) lokaali maksimikohta, jos on olemassa $r > 0$ siten, että $f(x) < f(x_0)$ kaikilla $x \in U(x_0, r) \setminus \{x_0\}$.

Palautamme mieliin korollaarin 8.2 ja formuloimme sen uudestaan:

Lause 8.7. *Jos piste x_0 on funktion f ääriarvokohta ja jos on olemassa $f'(x_0)$, niin $f'(x_0) = 0$.*

Pelkkä ehto $f'(x_0) = 0$ ei kuitenkaan takaa, että x_0 on ääriarvokohta. Funktio $f(x) = x^3$, antaa arvolla $x_0 = 0$ esimerkin tapauksesta, jossa $f'(x_0) = 0$, mutta jossa silti x_0 ei ole ääriarvokohta. Seuraavassa annamme ns. f'-testin lokaaleille ääriarvokohdille.

Lause 8.8. (f′-testi ääriarvokohdille). *Funktiosta f oletetaan, että*
(1) f on jatkuva pisteen x_0 ympäristössä $U(x_0, r)$ ja
(2) f on derivoituva kaikilla $x \in U(x_0, r) \setminus x_0$.
Jos lisäksi (3)

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \text{ kun } x_0 - r < x < x_0 \\ f'(x) < 0, \text{ kun } x_0 < x < x_0 + r\,, \end{cases}$$

niin x_0 on funktion f olennainen lokaali maksimikohta.
Jos ehto (3) korvataan ehdolla (3')

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \text{ kun } x_0 - r < x < x_0 \\ f'(x) > 0, \text{ kun } x_0 < x < x_0 + r\,, \end{cases}$$

niin x_0 on funktion f olennainen lokaali minimikohta.

Todistus. Katso alkuosa kirjasta [Myrberg, lause 5.6.1]. Edellä olevasta kasvavuuslauseesta [Myrberg, lause 5.5.3] saadaan, että f on aidosti pienenevä välillä $(x_0 - r, x_0)$ ja aidosti kasvava välillä $(x_0, x_0 + r)$. Väite seuraa tästä.

Lause 8.9. *Funktiosta f oletetaan, että*
(1) f on jatkuva pisteen x_0 ympäristössä $U(x_0, r)$ ja
(2) f on derivoituva kaikilla $x \in U(x_0, r) \setminus \{x_0\}$.
Lisäksi oletetaan, että
(3) $f'(x)$ on samanmerkkinen kaikkialla ja $f'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in U(x_0, r) \setminus \{x_0\}$.
Tällöin x_0 ei ole funktion f ääriarvokohta.

Todistus. Funktio f on aidosti monotoninen välillä $U(x_0, r)$.

Esimerkki. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ ja $x_0 = 0$.

Lause 8.10. (f′′-testi ääriarvoille). *Olkoon f määritelty ja derivoituva pisteen x_0 ympäristössä. Olkoon $f'(x_0) = 0$ ja olkoon olemassa $f''(x_0) > 0$, niin x_0 on funktion f lokaali minimikohta. Jos $f''(x_0) < 0$, niin x_0 on funktion f lokaali maksimikohta. Jos $f''(x_0) = 0$, niin tällöin funktion ääriarvoista pisteessä x_0 ei voida sanoa mitään.*

Todistus. Olkoon $f''(x_0) > 0$. Sovelletaan funktioon f' Lemmaa 8.1. On olemassa $\sigma > 0$ siten, että

$$\begin{cases} f'(x) > f'(x_0) = 0, \text{ kun } x_0 < x < x_0 + \sigma \\ f'(x) < f'(x_0) = 0, \text{ kun } x_0 - \sigma < x < x_0\,. \end{cases}$$

Tällöin f'-testilauseesta [Myrberg 5.6.1] seuraa, että x_0 on lokaali minimikohta. Tapaus $f''(x_0) < 0$ käsitellään vastaavasti. Jos $f''(x) = 0$, voi x_0 olla tai olla olematta ääriarvokohta.

Esimerkki. Olkoon
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4$.
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -x^4$.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$.
Funktiolla f on nollassa lokaali minimikohta (itse asiassa globaali minimikohta), funktiolla h on nollassa lokaali maksimikohta (itse asiassa globaali maksimikohta), ja funktiolla g ei ole nollassa ääriarvoa. Piirrä kuva!

Muistutus. Juuri ennen Weierstrassin min-max -lausetta määrittelimme käsitteet funktion suurin arvo ja funktion pienin arvo. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Jos on olemassa

$$\max f(A) = \max fA = \max\{f(x)|x \in A\} = \max_{x\in A} f(x)\,,$$

se on funktion suurin arvo eli globaali maksimiarvo. Siis M on funktion f suurin arvo, joss
(1) $f(x) \leq M$ kaikilla $x \in A$ ja
(2) $f(x) = M$ jollakin $x \in A$.
Vastaavasti määritellään funktion f pienin arvo eli globaali minimiarvo:

$$\min f(A) = \min fA = \min\{f(x)|x \in A\} = \min_{x\in A} f(x)\,.$$

Korollaari 8.11. Suljetulla välillä $[a, b]$ derivoituva funktio saavuttaa suurimman (ja vastaavasti pienimmän) arvonsa välin päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa.

Korollaari 8.12. Suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio saavuttaa suurimman (ja vastaavasti pienimmän) arvonsa välin päätepisteessä, derivaatan nollakohdassa tai epäderivoituvuuskohdassa (toisin sanoen pisteessä, jossa derivaatta ei ole olemassa).

Huomautuksia. (1) Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli. Olkoon $f : \Delta \to \mathbb{R}$ funktio. Olisimme voineet määritellä, että funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali maksimikohta, jos $f(x_0)$ on funktion f suurin arvo jollakin pisteen x_0 sisältävällä välillä $U(x_0, \sigma)\cap\Delta$. Tällöin lokaali ääriarvokohta voisi olla myös välin Δ päätepiste. L. Myrberg ja J. Väisälä ovat valinneet määrittelyn vain sisäpisteessä x_0 ja me teimme tässä siis samoin.
(2) Ääriarvotehtävissä on tutkittava (tarvittaessa)
derivaatan nollakohdat,
välin päätepisteet,
epäderivoituvuuskohdat ja
epäjatkuvuukohdat.

Esimerkkejä.
(1) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Määrää funktion f suurin ja pienin arvo.

Ratkaisu: $f(x) = 3x^4 + 4x^3$, f on jatkuva ja derivoituva. Mahdolliset lokaalit ääriarvokohdat:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1)\,, \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

joss

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -1\,.$$

Lokaalin ääriarvokohdan laatu selviää koulukurssista tutun merkkikaavion piirtämisellä. Piirrä merkkikaavio!

Merkkikaavion mukaan -1 on lokaali minimikohta, mutta 0 ei ole lokaali ääriarvokohta. Katso f'-testi ja Lause 8.9.) Siis -1 on lokaali minimikohta. Muita lokaaleja ääriarvokohtia ei ole.

Globaalit ääriarvokohdat:

$f'(x) < 0$ kaikilla $x < -1 \Longrightarrow f\Big|_{(-\infty,-1)}$ on aidosti vähenevä.

$f'(x) > 0$ kaikilla $x > -1$ ja $f'(x) = 0$, kun $x = 0$ tai $x = -1 \Longrightarrow f\Big|_{(-1,\infty)}$ on aidosti kasvava.

Siis -1 on globaali minimikohta. Globaalia maksimia ei ole, sillä $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Vastaus: $f(-1) = 3 - 4 = -1$ on pienin arvo ja suurinta arvoa ei ole.

(2) Olkoon $f : [-2, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Määrää funktion f suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 6]$.

Ratkaisu: Funktio f on jatkuva ja derivoituva suljetulla välillä $[-2, 6]$. Nyt riittää tutkia funktion f derivaatan f' nollakohdat ja välin päätepisteet.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3(-9)}}{3 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 108}}{6} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{6 \pm 12}{6}\,, \end{aligned}$$

siis

$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -1,$$

joten ehdokkaat ääriarvokohdiksi ovat -1 ja 3. Siis ainoat mahdolliset ehdokkaat ovat $-2, -1, 3$ ja 6.

$$\begin{aligned} &f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10\,, \\ &f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22;\ \text{pienin arvo}, \\ &f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3\,, \\ &f(6) = 216 - 108 - 54 + 5 = 59;\ \text{suurin arvo}. \end{aligned}$$

Vastaus: Suurin arvo on $f(6) = 59$ ja pienin arvo on $f(3) = -22$.

Huomaa, että ääriarvokohtien laatua ei tässä tehtävässä tarvinnut tutkia lainkaan.

Käyrän kuperuus. Välillä Δ derivoituvan funktion f kuvaajaa sanotaan alaspäin kuperaksi eli konveksiksi, jos kuvaaja ei missään välin pisteessä ole minkään tangenttinsa alapuolella. Ei siis suljeta pois käyriä, jotka ovat suoria.

Välillä Δ derivoituvan funktion f kuvaajaa sanotaan ylöspäin kuperaksi, eli konkaaviksi, jos kuvaaja ei missään välin pisteessä ole minkään tangenttinsa yläpuolella.

Säilytä geometrinen näkemys!

Lause 8.13. *Välillä Δ kahdesti derivoituvan funktion f kuvaaja on alaspäin kupera, joss $f''(x) \geq 0$ koko välillä.*

Todistus. Piirrä kuva! Pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ asetetun tangentin yhtälö on

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Siis kuvaajan ja tangentin y-arvojen erotus pisteessä x on

$$d(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))\,.$$

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa $\xi_x \in (x_0, x)$ siten, että

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \\ &= f'(\xi_x)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \\ &= (f'(\xi_x) - f'(x_0))(x - x_0)\,. \end{aligned}$$

Lause väittää, että $d(x) \geq 0$, joss $f''(x) \geq 0$.

Jos $f''(x) \geq 0$ välillä Δ, niin f' on kasvava, joten $d(x) \geq 0$.

Jos $d(x) \geq 0$ koko välillä Δ, on $f''(x) \geq 0$ koko välillä Δ. Sillä, jos yhdessäkin pisteessä x_0 olisi $f''(x_0) \leq 0$, niin Lemman 8.1 nojalla (sovellettuna funktioon f') olisivat luvut $x - x_0$ ja $f'(\xi_x) - f'(x_0)$ erimerkkisiä, kun x on riittävän lähellä kohtaa x_0 ja siis olisi $d(x) < 0$.

Lause 8.14. *Välillä Δ kahdesti derivoituvan funktion f kuvaaja on ylöspäin kupera joss $f''(x) \leq 0$ koko välillä.*

Todistus on vastaavanlainen kuin lauseen 8.17 todistus.

Käännepiste. Olkoon funktio f kahdesti derivoituva pisteen x_0 ympäristössä. Piste x_0 on funktion f käännepiste, jos $f''(x_0) = 0$ ja f'' vaihtaa merkkinsä ohitettaessa piste x_0.

Esimerkkejä. (1) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x \\ f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ f''(x) &= 6x\,. \end{aligned}$$

Silloin $f''(x) = 6x > 0$, joss $x > 0$.

Välillä $(-\infty, 0]$ on f ylöspäin kupera, ja välillä $[0, \infty)$ on f alaspäin kupera. Origo on funktion f käännepiste.

(2) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Aikaisemmin tutkimme ääriarvot välillä $[-2, 6]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ f''(x) &= 6x - 6 . \end{aligned}$$

Silloin $f''(x) = 0$, <u>joss</u> $x = 1$. Koska $f''(x) < 0$, kun $x < 1$, ja $f''(x) > 0$, kun $x > 0$, niin piste 1 on funktion f käännepiste.

Välillä $(-\infty, 1]$ on f kupera ylöspäin ja välillä $[1, \infty)$ on f kupera alaspäin.

l'Hospitalin sääntö. Tutkitaan raja-arvoa $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, kun $f(x_0) = 0$ ja $g(x_0) = 0$.

<u>l'Hospitalin säännön helppo muoto</u>: Olkoot f ja g määriteltyjä pisteen x_0 ympäristössä ja derivoituvia pisteessä x_0. Jos $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$ ja $g'(x_0) \neq 0$, niin

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} .$$

Todistus.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \\ &\longrightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} , \end{aligned}$$

kun $x \to x_0$.

Esimerkki. Määrää

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\sin(e^x - 1)} .$$

Oletetaan tunnetuksi, että

$$\begin{aligned} De^x &= e^x \\ D\sin x &= \cos x . \end{aligned}$$

Olkoot nyt

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} - e^{\sin x} \\ g(x) &= \sin(e^x - 1) . \end{aligned}$$

Funktiot f ja g ovat derivoituvia, $f(0) = g(0) = 0$ ja $g'(0) \neq 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x(\cos(e^x - 1)) \\ g'(0) &= e^0 \cos 0 = 1 \neq 0 . \end{aligned}$$

Derivoidaan osoittaja ja nimittäjä ja sijoitetaan $x = 0$.

$$\frac{2e^{2x} - (\cos x)e^{\sin x}}{(\cos(e^x - 1)e^x)} = \frac{2-1}{1} = 1 .$$

Siis

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\sin(e^x - 1)} = 1\,.$$

<u>Vaativampi muoto l'Hospitalin säännöstä:</u> Olkoon s jokin merkinnöistä $a, a+, a-, \infty$ tai $-\infty$, missä $a \in \mathbb{R}$. Olkoot edelleen funktiot f ja g derivoituvia välillä Δ ja olkoon olemassa

$$\lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,. \tag{1}$$

Jos

$$\lim_{x\to s} f(x) = \lim_{x\to s} g(x) = 0 \tag{2}$$

tai

$$\lim_{x\to s} |g(x)| = \infty\,, \tag{3}$$

niin

$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

Huomautuksia. (1) Oletus pitää implisiittisesti sisällään seuraavat oletukset: f ja g ovat määriteltyjä ja derivoituvia s:n lähellä ja $g'(x) \neq 0$ s:n lähellä.

(2) Tapaus $\lim_{x\to a}$ seuraa tapauksista $\lim_{x\to a+}$ ja $\lim_{x\to a-}$, koska $\lim_{x\to a} h(x)$ on olemassa, <u>joss</u> raja-arvot $\lim_{x\to a+} h(x)$ ja $\lim_{x\to a-} h(x)$ ovat olemassa ja yhtäsuuret.

(3) Guillaume de l'Hospital (1661–1704) oli ranskalainen matemaatikko.

Formuloimme tapauksen $\lim_{x\to a+}$ tarkasti lauseissa 8.20 ja 8.21 kun $L \in \mathbb{R}$.

Lause 8.15. *Olkoot funktiot f ja g derivoituvia välillä (a, b), $g(x) \neq 0$ kaikilla $x \in (a, b)$ ja $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in (a, b)$.*
Olkoon

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Jos

$$\lim_{x\to a+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a+} g(x)\,, \tag{2}$$

niin

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

Todistus. Koska $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in (a, b)$, niin $g'(x) > 0$ tai $g'(x) < 0$ koko välillä (a, b).

Olkoon $a < x < y < b$. Cauchyn yleistetystä väliarvolauseesta saadaan, että on olemassa $\xi \in (x, y)$ siten, että

$$(f(y) - f(x))g'(\xi) = (g(y) - g(x))f'(\xi)\,,$$

missä $g(y) - g(x) \neq 0$, koska g on aidosti monotoninen.

Siis

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,. \tag{1*}$$

Kohdan (1) mukaan, jos $\epsilon > 0$ on annettu, niin on olemassa $\sigma > 0$ siten, että

$$\Big|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\Big| < \epsilon\,, \tag{2*}$$

kun $a < t < a + \sigma$.

Olkoon nyt $a < y < a + \sigma$. Valitaan $x \in (a, y)$. Silloin on olemassa $\xi \in (x, y)$ siten, että (1*) pätee. Koska $a < x < \xi < y < a+\sigma$, niin (2*) pätee, kun sijoitetaan $t = \xi$. Siis yhdistettynä edelliset saadaan, että

$$\Big|\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - L\Big| < \epsilon\,,$$

kun $a < x < y < a + \sigma$.

Kiinteällä pisteellä y annetaan pisteen x lähestyä pistettä a positiivisesta suunnasta, jolloin $f(x) \to 0$ ja $g(x) \to 0$ oletuksen (2) mukaan. Siis

$$\Big|\frac{f(y)}{g(y)} - L\Big| \leq \epsilon\,,$$

kun $a < y < a + \sigma$, eli siis

$$\lim_{y \to a+} \frac{f(y)}{g(y)} = L\,.$$

Väite tuli siis todistettua.

Lause 8.16. *Olkoot funktiot f ja g derivoituvia välillä (a, b) ja $g(x) \neq 0$ kaikilla $x \in (a, b)$ ja $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in (a, b)$.*
Olkoon

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Jos

$$\lim_{x \to a+} g(x) = \infty\,, \tag{2}$$

niin

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

Todistus. Nyt g on aidosti vähenevä. Tämä seuraa siitä, että $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in (a, b)$ ja $\lim_{x \to a+} g(x) = \infty$. Olkoon $\epsilon > 0$ on annettu. Nyt oletusten (1) ja (2) nojalla on olemassa $c_1 \in (a, b)$ siten, että

$$\Big|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\Big| < \frac{\epsilon}{2}\,, \tag{2*'}$$

kun $a < t < c_1$ ja $g(t) > 0$, kun $a < t < c_1$.

Kiinnitetään piste $y \in (a, c_1)$. Olkoon $x \in (a, y)$. Cauchyn yleistetyn väliarvolauseen nojalla on olemassa $\xi \in (x, y)$ siten, että

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Vertaa tätä edellisen lauseen todistukseen.

Siis

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(y) + f(y)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}\,.\end{aligned}$$

Koska g on aidosti vähenevä ja $x < y$, niin

$$1 - \frac{g(y)}{g(x)} > 0\,.$$

Siis (2*'):n nojalla pätee, että

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}\,.$$

Nyt oletuksen (2) nojalla on olemassa $c_2 \in (a, y)$ siten, että

$$\left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} < L + \epsilon\,,$$

kunhan $a < x < c_2$.

Vastaavasti $\frac{f(x)}{g(x)} > L - \epsilon$ välillä $a < x < c_3$.

Valitaan nyt $c_4 = \min\{c_2, c_3\}$, jolloin

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \epsilon\,,$$

kun $a < x < c_4$.

Huomautus. Myös tapaukset, jossa $L = \infty$ tai $L = -\infty$ voidaan todistaa vastaavasti.

Esimerkki. Määrää $\lim_{x \to 0+} x \ln x$.

Oletetaan tunnetuksi, että $D \ln x = \frac{1}{x}$ kaikilla $x > 0$.

Ratkaisu:

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \longrightarrow \frac{-\infty}{\infty}\,,$$

kun $x \to 0+$. Koska lauseen (2) oletukset ovat kunnossa välillä $(0, \infty)$, voidaan soveltaa l'Hospitalin sääntöä:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0+} x \ln x &= \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0+} x = 0\,.\end{aligned}$$

Huomautus. Lausekkeen $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ raja-arvoa tutkittaessa voidaan soveltaa uudelleen l'Hospitalin sääntöä, toisin sanoen voidaan tutkia lauseketta $\frac{f''(x)}{g''(x)}$. Mutta lauseen oletukset on joka askeleella tutkittava erikseen!

Esimerkki. Määrää

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \cos x}.$$

Oletetaan tunnetuiksi, että:

$$D \sin x = \cos x$$
$$D \cos x = -\sin x$$

Ratkaisu:

$$\frac{x - \sin x}{x - x\cos x} \to \frac{0}{0},$$

kun $x \to 0$. Tarkastetaan, että oletukset ovat kunnossa ja derivoidaan:

$$\frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + x \sin x} \to \frac{0}{0},$$

kun $x \to 0$. Tarkastetaan, että oletukset ovat kunnossa ja derivoidaan:

$$\frac{\sin x}{\sin x + \sin x + x \cos x} \to \frac{0}{0},$$

kun $x \to 0$. Tarkastetaan, että oletukset ovat kunnossa ja derivoidaan:

$$\frac{\cos x}{2\cos x + \cos x - x \sin x} \to \frac{1}{3},$$

kun $x \to 0$.

Esimerkki. Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = 0\,.$$

Ratkaisu:

$$\frac{x^2}{e^{3x}} \to \frac{\infty}{\infty},$$

kun $x \to \infty$. l'Hospitalin säännön nojalla kysytty raja-arvo on olemassa, jos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3e^{3x}} \tag{1}$$

on olemassa. Taas $\frac{2x}{3e^{3x}} \to \frac{\infty}{\infty}$, kun $x \to \infty$. Siis l'Hospitalin säännön nojalla (1) on olemassa, jos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{9e^{3x}}$$

on olemassa. Koska edelleen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = 0\,,$$

niin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = 0\,.$$

9. ALKEISFUNKTIOISTA

Polynomi. Funktio P_n,

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \,,$$

missä $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ ovat vakioita ja $a \neq 0$, on nimeltään polynomi, jonka asteluku on n. Tällöin merkitään: $\deg P = n$. Polynomia, jonka kaikki kertoimet ovat nollia, sanotaan nollapolynomiksi, ja sitä merkitään symbolilla $\mathcal{O}$. Lisäksi sovitaan, että $\deg \mathcal{O} = -\infty$.

Huomautuksia. (1) Polynomi P_n on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

(2) Polynomi $P_n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ on derivoituva koko $\mathbb{R}$:ssä ja sen derivaatta on

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \\ &= \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1} \,. \end{aligned}$$

(3) Jos polynomin P_n asteluku on pariton, niin polynomilla P_n on ainakin yksi reaalinen nollakohta. Tämä seuraa suoraan Bolzanon lauseesta. Katso myös Laskuharjoitustehtävät 6.8 ja 10.10.

(4) Olkoon

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$

missä $n \geq 1$ ja $a_n \neq 0$.

Määritä $\lim_{x\to\infty} P(x)$.

Koska

$$P(x) = x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right),$$

niin

$$P(x) \longrightarrow \infty \,,$$

kun $x \to \infty$, jos $a_n > 0$, ja

$$P(x) \longrightarrow -\infty \,,$$

kun $x \to \infty$, jos $a_n < 0$.

(5) Jos P ja Q ovat polynomeja, niin samoin ovat myös $P+Q$, $P-Q$ ja PQ. Lisäksi

$$\begin{aligned} &\deg(P+Q) \leq \max\{\deg P, \deg Q\} \\ &\deg(PQ) = \deg P + \deg Q \,, \end{aligned}$$

jos $P \neq \mathcal{O}$ ja $Q \neq \mathcal{O}$.

Esitämme seuraavassa muutamia muita polynomien ominaisuuksia.

Lause 9.1. *Jos x_1 on polynomin P_n nollakohta, niin tällöin $P_n(x)$ on jaollinen termillä $(x - x_1)$, toisin sanoen*

$$P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x)\,,$$

missä $Q_{n-1}(x)$ on $(n-1)$-asteinen polynomi.

Todistus. Induktiolla todetaan, että

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})\,,$$

katso Ohjaus 1.3, joten koska $P_n(x_1) = 0$, on

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x) - P_n(x_1) \\ &= a_n(x^n - x_1^n) + \cdots + a_1(x^1 - x_1^1) + a_0 - a_0 \\ &= (x - x_1)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0)\,, \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_n x_1 + a_{n-1} \\ &\vdots \\ b_0 &= a_n x_1^{n-1} + \cdots + a_1\,. \end{aligned}$$

Korollaari 9.2. Jos polynomilla P_n on n eri nollakohtaa $x_1, \ldots, x_n$, niin

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\,.$$

Korollaari 9.3. n:nnen asteen polynomilla P_n voi olla korkeintaan n eri nollakohtaa.

p-kertainen nollakohta. Jos

$$P_n(x) = (x - x_1)^p Q_{n-p}(x)\,,$$

missä x_1 ei ole polynomin Q_{n-p} nollakohta, niin sanotaan, että x_1 on polynomin P_n $\underline{p\text{-kertainen}}$ nollakohta (eli yhtälön $P_n(x) = 0$ p-kertainen juuri).

Lause 9.4. *Jos x_1 on polynomin P_n p-kertainen nollakohta, niin x_1 on polynomin P_n' $(p-1)$-kertainen nollakohta.*

Todistus. Koska

$$P_n(x) = (x - x_1)^p Q_{n-p}(x)\,,$$

missä $Q_{n-p}(x_1) \neq 0$, on

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= p(x - x_1)^{p-1}Q_{n-p}(x) + Q_{n-p}'(x)(x - x_1)^p \\ &= (x - x_1)^{p-1}(pQ_{n-p}(x) + (x - x_p)Q_{n-p}'(x)) \\ &= (x - x_1)^{p-1}H(x)\,, \end{aligned}$$

missä

$$H(x) = pQ_{n-p}(x) + (x - x_1)Q_{n-p}'(x)$$

on polynomi, jolle pätee, että $H(x_1) \neq 0$.

Binomikaava 9.5. Induktiolla todistetaan niin sanottu Newtonin binomikaava:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k\,,\end{aligned}$$

missä lukua "n yli k:n", $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, sanotaan binomikertoimeksi. Selvästi $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Muista myös Pascalin kolmio binomikertoimia määrättäessä!

Huomautuksia. (1) Polynomeille on voimassa niin sanottu jakoyhtälö:
Jos P_n ja $Q_m, n \geq m$, $(Q_m \neq \mathcal{O})$, ovat polynomeja, niin on olemassa yksikäsitteiset polynomit H ja K siten, että

$$P_n = HQ_m + K\,,$$

missä polynomin K asteluku on alempi kuin polynomin Q_m.
Katso Myrbergin kirja, Lause 3.4.1.

(2) Kun $n = 1, 2, 3, 4$, saadaan polynomin P_n nollakohdat eli yhtälön

$$a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$$

ratkaisut algebrallisesti eli ratkaisut saadaan annetuista kertoimista suorittamalla äärellinen määrä yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja sekä juurenottoja. Kun $n \geq 5$, ei ratkaisuja enää löydetä algebrallisesti. Tämän todisti nuori norjalainen Nils Abel, vuonna 1823.

Rationaalifunktio. Funktio R,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,,$$

missä P ja Q ovat polynomeja ja $Q \neq \mathcal{O}$, on nimeltään rationaalifunktio.

Rationaalifunktion R luonnollinen lähtö on $\mathbb{R}\setminus\{x : Q(x) = 0\}$, missä $\{x : Q(x) = 0\}$ on äärellinen joukko [Myrberg, Lause 3.4.4].

Esimerkki. Funktion

$$R(x) = \frac{x^3 + 5x + 1}{x^4 - 1}\,,$$

luonnollinen lähtö on $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Huomautus. Olkoot

$$\begin{aligned}P(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m, \\ Q(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n\,,\end{aligned}$$

missä $a_m \neq 0$ ja $b_n \neq 0$. Olkoon

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,.$$

Tällöin

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} 0, \text{ jos } m < n. \\ \pm\infty, \text{ jos } m > n; \text{ etumerkin määrää termi } \frac{a_m}{b_n} \\ \frac{a_m}{b_n}, \text{ jos } m = n. \end{cases}$$

Todistus. a) Jos $m < n$. Tällöin

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{x^{n-m}}\left(\frac{\frac{a_0}{x^m} + \cdots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \cdots + b_n}\right) \\ &\longrightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_n} = 0\,, \end{aligned}$$

kun $x \to \infty$.

b) Jos $m > n$. Tällöin

$$R(x) = x^{m-n}\left(\frac{\frac{a_0}{x^m} + \cdots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \cdots + b_n}\right)$$

ja $R(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, jos $\frac{a_m}{b_n} > 0$.

Jos $\frac{a_m}{b_n} < 0$, niin $R(x) \to -\infty$, kun $x \to \infty$.

c) Jos $m = n$. Tällöin

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\frac{a_0}{x^m} + \cdots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \cdots + b_n} \\ &\longrightarrow \frac{a_m}{b_n}\,, \end{aligned}$$

kun $x \to \infty$.

Lause 9.6. *Olkoon $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, x_0 \in \mathbb{R}$ ja $Q(x_0) \neq 0 \neq P(x_0)$. Tällöin*

$$\lim_{x\to x_0} |R(x)| = \infty\,.$$

Todistus. Koska

$$Q(x) = (x - x_0)^m Q_1(x)\,,$$

missä $m > 0$, Q_1 on polynomi ja $Q_1(x_0) \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} |R(x)| &= \frac{1}{|x - x_0|^m}\frac{|P(x)|}{|Q_1(x)|} \\ &\longrightarrow \infty \cdot \frac{|P(x_0)|}{|Q_1(x_0)|} = \infty\,, \end{aligned}$$

kun $x \to x_0$.

Algebrallinen funktio. Funktiota f sanotaan algebralliseksi, jos se toteuttaa yhtälön

$$P(x, f(x)) = 0\,,$$

missä P on kahden muuttujan polynomi. Funktioita, jotka eivät ole algebrallisia, sanotaan transkendenttisiksi funktioiksi. Tällaisia ovat mm. eksponenttifunktio ja trigonometriset funktiot. Kahden muuttujan polynomilla taas tarkoitetaan sitä, että $P(x, y)$ on muotoa

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j\,,$$

missä $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Esimerkki. Olkoon $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Tällöin funktio f on algebrallinen, sillä

$$f(x) = y = \sqrt[3]{x}$$

ja

$$P(x, y) = x - y^3 = 0\,.$$

Esimerkki. Polynomit, rationaalifunktiot ja juurifunktiot ovat algebrallisia funktioita.

Alkeisfunktio. Soveltamalla yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskua sekä yhdistämisoperaatioita algebrallisiin funktioihin sekä eräisiin transkendenttifunktioihin (esimerkiksi eksponenttifunktioihin, trigonometrisiin funktioihin ja niiden käänteisfunktioihin), saadaan funktioita, joita kutsutaan alkeisfunktioiksi.

Esimerkkejä. Seuraavat funktiot ovat alkeisfunktioita:

$$\begin{aligned} &\overline{arc}\sin x\,, \\ &\ln x\,, \\ &\cos(x^2 + e^x)\,, \\ &x^x\,. \end{aligned}$$

Seuraavassa tutkimme eräiden transkendenttisten alkeisfunktioiden ominaisuuksia.

Eksponenttifunktio $\mathbf{e^x}$.

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,7182\ldots$$

Tavoitteenamme on nyt määritellä e^x kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Muistutuksia.

$$\begin{aligned} &x^0 = 1 \\ &x^m x^n = x^{m+n}, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \\ &(x^m)^n = x^{mn}, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \\ &x^{-n} = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, x \neq 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

(2) Käänteisfunktion jatkuvuuslauseen jälkeen määrittelimme funktion $x^{\frac{1}{n}}$.

Luku $x^{\frac{m}{n}}$ määritellään yhdistämällä funktiot

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{ja} \quad g(y) = y^m\,,$$

toisin sanoen

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m\,.$$

Huomataan, että

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\,,$$

missä $m \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{N}, x \neq 0$.

Funktio $x \mapsto x^{\frac{m}{n}}$ on määritelty välillä $[0, \infty)$, ja jos n on pariton, niin se on määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä.

Kokonaisia eksponentteja koskevista laskusäännöistä seuraa, että

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$
$$x^{\frac{m}{n}} x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}\,.$$

Havainto. e^x on määritelty, kun $x \in \mathbb{Q}$,

$$e^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{e})^m = \sqrt[n]{e^m}$$
$$e^{x+y} = e^x e^y$$
$$(e^x)^y = e^{xy}$$
$$e^0 = 1\,.$$

Tällöin,
(1) jos $x = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{N}$, siis $x > 0$, niin $e^x > 1$, sillä $e > 1$, joten $e^{\frac{1}{n}} > 1$ ja $e^{\frac{m}{n}} > 1$. Tästä seuraa, että funktio
(2) e^x on aidosti kasvava joukossa $\mathbb{Q}$, sillä $e^{x+h} = e^x e^h > e^x$, kun $h > 0$.

Lause 9.7. *$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, on jatkuva.*

Todistus. (1) Osoitetaan, että funktio f on jatkuva origossa. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\frac{n}{n-1} < 1 + \epsilon \quad \text{ja} \quad \frac{n-1}{n} > 1 - \epsilon\,.$$

Näin voidaan tehdä, kun valitaan $n > \frac{1+\epsilon}{\epsilon}$.

Olkoon $x \in \mathbb{Q}$ siten, että $|x| < \frac{1}{n}$. On osoitettava, että

$$|e^x - 1| < \epsilon\,.$$

Koska $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$, niin

$$e^{-\frac{1}{n}} < e^x < e^{\frac{1}{n}}\,,$$

sillä e^x on kasvava.

Nyt

$$e^{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1} < 1 + \epsilon$$

ja

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} > \frac{n-1}{n} > 1 - \epsilon\,.$$

Sillä $(1 - \frac{1}{n})^n$ on nouseva ja $(1 - \frac{1}{n})^n < \frac{1}{e}$. (Tämä tulos todistetaan myöhemmin.)

Siis

$$|e^x - 1| < \epsilon\,,$$

ja f on jatkuva origossa.

(2) Olkoon $x_0 \in \mathbb{Q}$. Osoitetaan, että f on jatkuva pisteessä x_0.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $h \in \mathbb{Q}$. Silloin

$$\begin{aligned} &|f(x_0 + h) - f(x_0)| = |e^{x_0+h} - e^{x_0}| \\ &= |e^{x_0}e^h - e^{x_0}| = e^{x_0}|e^h - 1|\,. \end{aligned}$$

Koska funktio f on jatkuva origossa, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|e^h - 1| < \epsilon e^{-x_0}\,,$$

kun $|h| < \delta$.

Tällöin

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \epsilon\,.$$

Määritelmä. Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, niin

$$e^x = \sup\{e^r | r \in \mathbb{Q}, r < x\}\,.$$

Tämä joukko on ylhäältä rajoitettu; jos valitaan $s \in \mathbb{Q}, s > x$, niin $e^r < e^s$ kaikilla $r < s$. Siis

$$e^x = \sup e^r \le e^s\,.$$

Merkitsemme myös, usein painoteknisistä syistä, että

$$e^x = \exp(x)\,,$$

jolloin $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Seuraavaksi tutkimme eksponenttifunktion ominaisuuksia.

Lemma 9.8. Olkoon $x \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n < x$ ja $x_n \to x$. Tällöin

$$\exp(x_n) \longrightarrow \exp(x)\,.$$

Todistus. Jos $x \in \mathbb{Q}$, niin väite seuraa siitä, että $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, on jatkuva. Olkoon $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja olkoon $\epsilon > 0$ annettu. Silloin on olemassa $r \in Q$ siten, että $r < x$ ja $e^x > e^x - \epsilon$, koska $e^x = \sup\{e^p | p \in Q, p < x\}$.

Valitaan n_0 siten, että $x_n > r$, kun $n > n_0$. Näillä n pätee, että

$$e^x - \epsilon < e^r < e^{x_n} < e^x\,,$$

koska e^x on aidosti kasvava joukossa $\mathbb{Q}$ ja $x_n \in \mathbb{Q}$.

Lause 9.9. *$e^{x+y} = e^x e^y$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Valitaan nousevat rationaalilukujonot (x_n) ja (y_n) siten, että

$$\begin{aligned} x_n &\to x \\ y_n &\to y\,, \end{aligned}$$

jolloin

$$x_n + y_n \to x + y\,.$$

Koska

$$e^{x_n+y_n} = e^{x_n} e^{y_n}\,,$$

niin lemmasta 9.8 saadaan, kun $n \to \infty$,

$$e^{x+y} = e^x e^y\,.$$

Lemma 9.10. $e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Tapaus, jossa $x \in \mathbb{Q}$ todistettiin jo aikaisemmin.

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ niin valitaan $r \in \mathbb{Q}, r < x$, jolloin

$$e^x \geq e^r > 0\,,$$

sillä $x = \{e^p | p < x, p \in \mathbb{Q}\}$.

Lemma 9.11. $x \mapsto \exp(x)$ on aidosti kasvava $\mathbb{R}$:ssä.

Todistus. Jos $h > 0$, niin $e^h > 1$, koska voidaan valita $r \in \mathbb{Q}$ siten, että $0 < r < h$, jolloin

$$e^h \geq e^r > 1\,.$$

Olkoon nyt $x < y$, jolloin $y = x + h, h > 0$. Siis

$$e^y = e^{x+h} = e^x e^h > e^x\,,$$

sillä $e^x > 0$ ja $e^h > 1$.

Muistutus. Aikaisemmin olemme todistaneet seuraavan lauseen.

Lause 9.12. *Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin jono (x_n), missä*

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

on nouseva niillä n, joilla $n > |x|$. Lisäksi jono (x_n) on ylhäältä rajoitettu.

Huomautus. Kun $x = 1$, saadaan Neperin luku $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Huomautus 9.13. Nousevalla lukujonolla $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ on raja-arvo $\frac{1}{e}$.

Todistus.

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \frac{\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}\,,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$, kun sovellamme seuraavaa aputulosta.

Aputulos 9.14.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1\,,$$

sillä

$$\begin{aligned}1 \geq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n &\geq 1-\frac{1}{n^2}(n) \\ &= 1-\frac{1}{n} \to 1\,,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$.

Yllä on käytetty Bernoullin epäyhtälöä: $(1+x)^n \geq 1+nx, n \in \mathbb{N}, x > -1$.

Lemma 9.15.

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Todistus. Nousevalla lukujonolla $(1-\frac{1}{n})$ on raja-arvo $\frac{1}{e}$, kun $n \to \infty$. Siis

$$(1-\frac{1}{n}) < \frac{1}{e}$$

ja

$$\frac{n-1}{n} < \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}\,.$$

Siis

$$e^{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1} = 1+\frac{1}{n-1}\,.$$

Toisaalta lisäksi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

eli

$$1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}<e^{\frac{1}{n}}\,.$$

Siis

$$1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n-1}\,,$$

joten kuristuslauseen nojalla

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}=1\,.$$

Koska $e^{\frac{1}{n}}e^{-\frac{1}{n}}=1$ niin

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}}=1\,.$$

Lause 9.16. *Funktio $x\mapsto e^x$ on jatkuva $\mathbb{R}$:ssä.*

Todistus. Olkoon $x_0\in\mathbb{R}$. Osoitetaan, että funktio f on jatkuva pisteessä x_0.

(a) Jos $x_0=0$. Olkoon $\epsilon>0$. Edellä olevista lemmoista saadaan, että

$$e^{\frac{1}{n}}\to 1$$

ja

$$e^{-\frac{1}{n}}\to 1\,,$$

kun $n\to\infty$.

Siis on olemassa n, jolle

$$|e^{\frac{1}{n}}-1|<\epsilon$$

ja

$$|e^{-\frac{1}{n}}-1|<\epsilon\,,$$

siis erityisesti

$$e^{\frac{1}{n}}-1<\epsilon \quad \text{ja} \quad e^{-\frac{1}{n}}-1>-\epsilon\,.$$

Kun $|x|<\frac{1}{n}$, niin

$$e^{-\frac{1}{n}}<e^x<e^{\frac{1}{n}}$$

ja siis

$$-\epsilon<e^x-1<\epsilon\,,$$

eli

$$|e^x-1|<\epsilon\,.$$

Siis funktio f on jatkuva origossa.

(b) Jos taas x_0 on mielivaltainen piste $\mathbb{R}$:ssä. Silloin

$$e^{x_0+h}=e^{x_0}e^h\to e^{x_0}\cdot 1\,,$$

kun $h\to 0$, (a)-kohdan nojalla. Siis funktio e^x on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

Lemma 9.17.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\,.$$

Todistus. Aikaisemmin on todistettu, että
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e,\text{ kun } n\to\infty$$
ja
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to \frac{1}{e},\text{ kun } n\to\infty\,,$$
ja siis
$$1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n-1}\,,$$
eli

(1)
$$\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}-1<\frac{1}{n-1}\,.$$

Olkoon $x\in(0,1)$. Valitaan n_x siten, että
$$\frac{1}{n_x}<x\le\frac{1}{n_x-1}\,.$$
Koska e^x on aidosti kasvava, niin (1):n nojalla
$$\frac{1}{n_x}<e^{\frac{1}{n_x}}-1<e^x-1\le e^{\frac{1}{n_x-1}}-1<\frac{1}{n_x-2}\,.$$
Siis
$$\frac{1}{xn_x}<\frac{e^x-1}{x}<\frac{1}{x(n_x-2)}\,.$$
Koska
$$\frac{1}{n_x}<x\le\frac{1}{n_x-1}$$
eli
$$n_x-1\le\frac{1}{x}<n_x\,,$$
niin
$$\frac{n_x-1}{n_x}<\frac{e^x-1}{x}<\frac{n_x}{n_x-2}\,.$$
Kun $x\to 0+$, niin $n_x\to\infty$, joten ala- ja ylärajat lähestyvät lukua 1, siis
$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1\,.$$
Jos $x<0$, niin
$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^{-|x|}-1}{-|x|}=\frac{1}{e^{|x|}}\left(\frac{e^{|x|}-1}{|x|}\right)$$
$$\to\frac{1}{1}\cdot 1=1\,,$$
kun $x\to 0$.

Näin ollen
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\,.$$

Lause 9.18. *Funktio $x \mapsto e^x$ on positiivinen, aidosti kasvava ja derivoituva koko $\mathbb{R}$:ssä ja $De^x = e^x$. Lisäksi*

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad ja \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,.$$

ja e^x voittaa kasvussa kaikki potenssit x^p, $p \in \mathbb{N}$, siis

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty\,.$$

Todistus. (1) Edellä olevissa lemmoissa on todettu, että eksponenttifunktio on positiivinen, aidosti kasvava ja jatkuva.

(2) Koska $e > 1$, on

$$\lim_{n\to\infty} e^n = \infty\,,$$

joten funktion e^x aidon kasvavuuden nojalla pätee myös, että

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty\,.$$

Edelleen,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = \frac{1}{\infty} = 0\,.$$

(3) Osoitetaan, että $De^x = e^x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}\,,$$

niin väite seuraa edellisestä lemmasta, jonka mukaan

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1\,.$$

(4) Osoitetaan vielä, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty\,,$$

$p \in \mathbb{N}$. Tämä on Laskuharjoitustehtävä 11.3. (Helppo l'Hospitalin säännön sovellus.)

Huomautuksia. (1) Edellä olevasta seuraa, että

$$D^{(n)} e^x = e^x$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Geometrisesti tämä merkitsee sitä, että käyrän $y = e^x$ jokaisessa pisteessä tangentin kulmakerroin on sama kuin pisteen y-koordinaatti!

(2) Kaikilla x pätee, että $e^x \geq 1 + x$. Näytetään tämä.

Merkitään $f(x) = e^x$, jolloin $f^{(2)}(x) = e^x > 0$. Siis funktio f on alaspäin kupera. Funktion $f(x) = e^x$ tangentti pisteessä $(0, 1)$ on

$$y = 1 + 1 \cdot x = 1 + x\,.$$

Siis $e^x \geq 1 + x$ kaikilla x.

(3) Edellä olevasta epäyhtälöstä $e^x \geq 1+x$ seuraa myös heti se, että $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

Logaritmifunktio. Olemme todistaneet, että $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ on aidosti kasvava, jatkuva ja että se saa kaikki arvot välillä $(0, \infty)$.

On siis olemassa käänteisfunktio

$$\exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,,$$

jota merkitään log tai ln.

Koska yhdistetty funktio

$$(\exp \circ \ln)(x) = \exp(x) \circ \ln(x) = x\,,$$

toisin sanoen

$$\exp(\ln(x)) = x\,,$$

niin

$$\begin{aligned} xy &= \exp(\ln(x)) \exp(\ln(y)) = e^{\ln x} e^{\ln y} \\ &= \exp(\ln(x) + \ln(y)) = e^{\ln x + \ln y}\,, \end{aligned}$$

ja siis

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\,.$$

Edelleen, koska $\exp(0) = 1$, niin

$$0 = \ln 1 = \ln x \frac{1}{x} = \ln x + \ln \frac{1}{x}\,,$$

ja siis

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x\,.$$

Lause 9.19. *Logaritmifunktio* $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$, *on aidosti kasvava ja derivoituva ja se saa kaikki reaaliarvot. Lisäksi,*

$$D \ln x = \frac{1}{x}\,.$$

Lisäksi $\ln x$ *häviää kasvussa kaikille potensseille* $x^{\frac{1}{p}}$, $p \in \mathbb{N}$, *toisin sanoen*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{1}{p}}}{\ln x} = \infty = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{(\ln x)^p}\,.$$

Todistus. Logaritmifunktion aito kasvavuus ja derivoituvuus seuraavat käänteisfunktion $\exp(x)$ vastaavista ominaisuuksista. Jos merkitään $y = \ln x$, saadaan

$$D \ln x = \frac{1}{D(e^y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}\,.$$

Lisäksi

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{(\ln x)^p} = \lim_{y \to \infty} \frac{\exp(y)}{y^p} = \infty\,,$$

ja siis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{(\ln x)^p} = \infty\,.$$

Kertausta 9.20. Olkoon $p \in \mathbb{N}$. Tällöin

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$,

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^p} = \infty$,

(3) $\lim_{x\to\infty} x(\ln x)^p = 0$.

Todistus. Laskuharjoitustehtävät 11.3, 11.4 ja 11.5.

Yleinen eksponenttifunktio $\mathbf{a^x}$. Olkoon $a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$. Yleinen eksponenttifunktio a^x voidaan esittää yhdistettynä funktiona $e^{kx}, \exp(kx)$, missä $k = \ln a$.

Lause 9.21.

$$a^x = e^{x \ln a} = \exp(x \ln a).$$

Todistus. Katso Myrberg, luku 6.4.

Huomautus. Funktio $x \mapsto a^x$ on aidosti kasvava, kun $a > 1$ ja aidosti laskeva, kun $0 < a < 1$.

Edelleen

$$Da^x = a^x \ln a$$

ja

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, \text{ jos } a > 1 \\ 0, \text{ jos } a < 1\,. \end{cases}$$

Yleinen logaritmifunktio $\mathbf{{}^a\log x}$.

Olkoon $a > 0$ ja $a \neq 1$. Koska $x \mapsto a^x$ on aidosti monotoninen ja jatkuva, niin sillä on käänteisfunktio, nimittäin a-kantainen logaritmifunktio:

$${}^a\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,.$$

Koska

$$a^x \circ {}^a\log x = x\,,$$

toisin sanoen

$$a^{{}^a\log x} = x\,,$$

niin

$$\ln(a^{{}^a\log x}) = ({}^a\log x) \ln a = \ln x\,.$$

Toisin sanoen

$${}^a\log x = \frac{\ln x}{\ln a}\,.$$

Edelleen

$$D\,{}^a\log x = D\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}\,.$$

Yleinen potenssifunktio. $x \mapsto x^\mu$, missä $\mu \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Määritellään

$$x^\mu = \exp(\mu \ln x) = e^{\mu \ln x}\,.$$

Tällöin x^μ tulee määritellyksi välillä $(0, \infty)$ jatkuvana funktiona, joka on
aidosti kasvava, jos $\mu > 0$,
aidosti laskeva, jos $\mu < 0$, ja
$+1$, (eli vakio) kun $\mu = 0$.

Tutut laskusäännöt ovat voimassa, esimerkiksi

$$x^{\mu+\nu} = x^\mu \cdot x^\nu\,.$$

Derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned} Dx^\mu &= D\exp(\mu \ln x) = \exp(\mu \ln x)\frac{\mu}{x} \\ &= \frac{\mu}{x}x^\mu = \mu x^{\mu-1}\,, \end{aligned}$$

joten

$$Dx^\mu = \mu x^{\mu-1}\,.$$

Tärkeä huomautus. Tyyppiä $f(x)^{g(x)}$ olevat funktiot määritellään seuraavasti:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln f(x))\,.$$

Esimerkki. Olkoon $f(x) = x^x$. Määritä funktion f suurin ja pienin arvo välillä $(0, 1]$, jos kyseinen arvo on olemassa.

Ratkaisu: Nyt $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$. Funktio f on selvästi jatkuvien funktioiden yhdistettynä funktiona jatkuva. Lisäksi

$$f'(x) = \exp(x \ln x)(Dx \ln x) = \exp(x \ln x)(\ln x + x \cdot \frac{1}{x})\,.$$

Siis $f'(x) = 0$, jos

$$\ln x + 1 = 0$$

eli kun

$$\ln x = -1$$

eli kun

$$x = e^{-1} \in (0, 1]\,.$$

$$f(e^{-1}) = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} \approx 0.692 < 1\,.$$

Toisaalta $f'(x) = \exp(x \ln x)(1 + \ln x) > 0$, kun $x > \frac{1}{e}$, sillä $\exp(x \ln x) > 0$ ja $(1 + \ln x) > 0$, kun $x > \frac{1}{e}$. Lisäksi $f'(x) < 0$, kun $0 < x < \frac{1}{e}$.

Siis funktio f on aidosti vähenevä välillä $(0, \frac{1}{e}]$ ja aidosti kasvava välillä $[\frac{1}{e}, 1]$.

Siis $\frac{1}{e}$ on lokaali ja globaali minimikohta. Toisaalta

$$f(1) = 1$$

ja

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \exp(x \ln x) = 1\,.$$

Siis funktion x^x suurin arvo on $f(1) = 1$ ja sen pienin arvo on $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$.

Lemma 9.22. Neperin luku e määriteltiin raja-arvona $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Sen yleistys on

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Todistus. Valitaan x suureksi, $x \geq 1$. Valitaan $n_x \in \mathbb{N}$ siten, että $n_x \leq x < n_x + 1$. Silloin

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \leq \left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \\ &\leq \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1},\end{aligned}$$

missä vasen puoli

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} = \frac{\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+1}}{1+\frac{1}{n_x+1}} \to \frac{e}{1}\,,$$

kun $n_x \to \infty$, ja oikea puoli

$$\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} = \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x}\left(1+\frac{1}{n_x}\right) \to e\cdot 1 = e\,,$$

kun $n_x \to \infty$.

Siis kun $x \to \infty$, niin

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Lause 9.23. *Olkoon $a \in \mathbb{R}$ kiinnitetty ja olkoon $x \in (0,\infty)$. Silloin*

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^a\,.$$

Todistus. (1) Kun $a = 0$, niin väite on selvä.

(2) Oletetaan, että $a \neq 0$ ja merkitään $\frac{a}{x} = \frac{1}{t}$, jolloin

$$\begin{aligned}&(1+\frac{a}{x})^x = (1+\frac{1}{t})^{ta} \\ &= \left((1+\frac{1}{t})^t\right)^a \\ &\to e^a\,,\end{aligned}$$

kun $t \to \pm\infty$ eli kun $x \to \pm\infty$ potenssifunktion jatkuvuuden nojalla.

Hyperboliset funktiot. Integraalilaskennassa tulemme useasti käyttämään ns. hyperbolisia funktioita. Näitä ovat hyperbolinen sini, hyperbolinen kosini, hyperbolinen tangentti ja hyperbolinen kotangentti. Ne määritellään seuraavasti:

$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty)$,
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$,
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$
$\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$,
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Piirrä kuvaajat!

Hyperbolisille funktioille on voimassa kaavoja, jotka muistuttavat trigonometristen funktioiden kaavoja, esimerkiksi:
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Tämä tulos seuraa suoraan siitä, että
$$\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$$
ja
$$\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}).$$

Derivoimalla saadaan, että:

$$D \sinh x = D(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x,$$
$$D \cosh x = D(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x,$$
$$D \tanh x = D \tfrac{\sinh x}{\cosh x} = \tfrac{1}{\cosh^2 x}, \text{ ja}$$
$$D \coth x = 1 - \coth^2 x.$$

Areafunktiot eli hyperbolisten funktioiden käänteisfunktiot. Areafunktiot määritellään hyperbolisten funktioiden käänteisfunktioina.

Koska $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava ja jatkuva bijektio, on sillä käänteisfunktio
$$\operatorname{ar}\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
jolla on samat ominaisuudet.

Koska $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ on aidosti kasvava ja jatkuva $\mathbb{R}$:ssä arvojoukkonaan $(-1, 1)$, on tanh siis bijektio, ja sillä on olemassa käänteisfunktio

$$\operatorname{ar}\tanh : (-1, 1) \to \mathbb{R}\,.$$

Funktion $\cosh y$ rajoittumalla välille $(0, \infty)$ on käänteisfunktio $\operatorname{ar}\cosh x$, joka on määritelty välillä $[1, \infty)$.

Koska $\cosh y = \cosh(-y)$, on funktion $\cosh y$ rajoittumalla välille $(-\infty, 0)$ olemassa käänteisfunktio $-\operatorname{ar}\cosh x$.

Koska $\coth y$ on aidosti vähenevä joukossa $(0, \infty)$ arvojoukkona $(1, \infty)$ ja aidosti vähenevä joukossa $(-\infty, 0)$ arvojoukkona $(-\infty, -1)$, on sen käänteisfunktio $\operatorname{ar}\coth x$ määritelty arvoilla $|x| > 1$.

Areafunktiot voidaan lausua myös logaritmifunktioiden avulla, sillä, jos merkitään

$$y = \operatorname{ar}\sinh x\,,$$

niin

$$\begin{aligned}
&x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&2x = e^y - e^{-y} \Big| : e^{-y} \\
&(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \\
&e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}\,.
\end{aligned}$$

Koska $e^y > 0$, niin ratkaisu, jossa on miinusmerkki juurilausekkeen edessä ei kelpaa, joten

$$\begin{aligned}
e^y &= x + \sqrt{x^2 + 1} \\
y &= \operatorname{ar}\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\,.
\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan, että

$$\begin{aligned}
&x = \cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \\
&(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \\
&e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \pm\operatorname{ar}\cosh x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \\
&= \pm\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\,,
\end{aligned}$$

sillä

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\,.$$

Merkitsemällä $y = \tanh x$ saadaan, että

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}\,,$$

joten

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x},$$

eli

$$y = \operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

kun $|x| < 1$.

Vastaavasti saadaan

$$\operatorname{ar}\coth x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},$$

kun $|x| > 1$.

Kootaan saadut tulokset vielä yhteen:

Lause 9.24. *Areafunktioille ovat voimassa seuraavat esitykset logaritmin avulla:*

$\operatorname{ar}\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$,

$\operatorname{ar}\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, *kun* $x \geq 1$,

$\operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, *kun* $|x| < 1$,

$\operatorname{ar}\coth x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, *kun* $|x| > 1$.

Areafunktioiden derivaatoiksi saadaan:

$D\operatorname{ar}\sinh x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$,

$D\operatorname{ar}\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, *kun* $x > 1$,

$D\operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{1-x^2}$, *kun* $|x| < 1$,

$D\operatorname{ar}\coth x = \frac{1}{1-x^2}$, *kun* $|x| > 1$.

Trigonometriset funktiot. Sini ja kosini määritellään koulukurssissa kuvaan vedoten. Niiden täsmällinen johtaminen sarjateorian avulla tehdään vasta kevään kurssilla Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2. Tällöin esimerkiksi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Muitakin määrittelymahdollisuuksia toki on, mutta mikään niistä ei oikein sovi tähän kohtaan kurssia.

Tässä vaiheessa oletamme kuitenkin tunnetuiksi seuraavat perusominaisuudet:

(1) sin ja cos ovat funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(2) $\sin 0 = 0$ ja $\cos 0 = 1$,

(3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

(4) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Katso esimerkiksi K. Väisälä: Trigonometria.)

Huomautus. Kohdasta (3) seuraa, että

$$|\sin x| \leq 1 \quad \text{ja} \quad |\cos x| \leq 1$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lause 9.25. *Funktiot* sin *ja* cos *ovat jatkuvia* $\mathbb{R}$*:ssä.*

Todistus. 1^o Koska kohtien (4) ja (3) mukaan

$$\cos x = \cos(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\,,$$

niin riittää osoittaa, että funktio sin on jatkuva.

2^o a) Näytetään ensin, että funktio sin on jatkuva origossa:
Kohdasta (5) seuraa, että on olemassa $\sigma > 0$ siten, että

$$\Big|\frac{\sin x}{x} - 1\Big| < 1\,,$$

kun $0 < |x| < \sigma$.
Näille x pätee, että

$$\Big|\frac{\sin x}{x}\Big| \leq \Big|\frac{\sin x}{x} - 1\Big| < 1 + 1 = 2\,,$$

joten $|\sin x| \leq 2|x|$. Siis $|\sin x| \leq 2|x|$ kaikilla x, kun $|x| < \sigma$. Siis

$$\lim_{x \to 0}(\sin x) = 0 \quad \text{ja} \quad \sin 0 = 0\,.$$

Siis funktio sin on jatkuva origossa ja kohdan 1^o mukaan myös funktio cos on jatkuva origossa.

2^o b) Näytetään nyt, että sin on jatkuva mielivaltaisessa $\mathbb{R}$:n pisteessä. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $h \in \mathbb{R}$. Silloin kohtien (4), 2^o a) ja (2) mukaan

$$\begin{aligned}\sin(x_0 + h) &= \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h \\ &\longrightarrow \sin x_0 \cos 0 + \cos x_0 \sin 0 = \sin x_0\,,\end{aligned}$$

kun $h \to 0$.
Siis funktio sin on jatkuva pisteessä x_0. Siis sekä sin että cos ovat jatkuvia koko $\mathbb{R}$:ssä.

Lause 9.26.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Todistus. Jatkuvuustodistuksen osassa 1^o osoitimme, että

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\,.$$

Siis

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}f(\frac{x}{2})^2\,,\end{aligned}$$

kun määrittelemme $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, \text{ kun } x\neq 0\\ 1, \text{ kun } x=0\,.\end{cases}$$

Koska f on jatkuva, niin myös yhdistetty funktio $x\mapsto \frac{1}{2}f(\frac{x}{2})^2$ on jatkuva ja siis

$$\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})^2 \to \frac{1}{2}f(0)^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Lause 9.27.

$$\begin{aligned}D\sin x &= \cos x\\ D\cos x &= -\sin x\,.\end{aligned}$$

Todistus. 1^o Nyt siis D $\sin x =$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}\\ &= \sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}\\ &\to \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x\,.\end{aligned}$$

Siis $D\sin x = \cos x$.

2^o Edelleen, D $\cos x =$

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}\\ &= \cos x\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x\frac{\sin h}{h}\\ &\to \cos x\cdot 0 - \sin x\cdot 1 = -\sin x\,.\end{aligned}$$

Siis $D\cos x = -\sin x$.

Huomautus. Ajattele asiaa geometrisesti!

Tärkeitä huomautuksia. (1) Raja-arvoa

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

ei ole olemassa. Näytetään tämä.

Kun $x \to \infty$, niin $\frac{1}{x} \to 0$ ja $\sin \frac{1}{x}$ saa kaikki arvot -1:stä 1:een yhä uudelleen ja uudelleen. Siis

$$\left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{y} \right| > 1$$

joillakin $x, y \in U(0, \delta) \setminus \{0\}$, valittiinpa δ kuinka pieneksi tahansa. Funktiota $\sin \frac{1}{x}$ sanotaan topologin sinikäyräksi. Piirrä kuvio!

Huomaa: Olkoon $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Koska raja-arvoa $\lim_{x\to 0} f(x)$ ei ole olemassa, niin funktiota f ei saa jatkuvaksi origossa, määriteltiinpä se origossa miten tahansa.

(2)

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0\,,$$

sillä

$$\left| 0 - x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \le |x| < \epsilon\,,$$

kun $0 < |x - 0| < \epsilon$. (Siis luvuksi δ kelpaa luku ϵ).

Huomaa: Olkoon

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad x \ne 0\,.$$

Koska $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ on olemassa, niin funktio f saadaan jatkuvaksi origossa asettamalla $f(0) = 0$.

(3) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2}, \text{ kun } x \ne 0 \\ 0, \text{ kun } x = 0\,. \end{cases}$$

Funktio f on derivoituva origossa ja $f'(0) > 0$, mutta f ei ole kasvava missään origon ympäristössä. Vertaa varoitus Lemman 8.1 jälkeen. Katso myös Laskuharjoitustehtävä 12.10.

Jaksollisuus. Luku $\omega \in \mathbb{R}$ on funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jakso, jos

$$f(x + \omega) = f(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Tällöin myös jokainen $n\omega$, missä $n \in \mathbb{Z}$, on funktion f jakso.

Lause 9.28. *Sinin ja kosinin jaksoja ovat täsmälleen luvut $n2\pi, n \in \mathbb{Z}$.*

Todistus. Katso Myrberg, Lause 6.6.2.

Huomautuksia. (1) Sinikäyrä saadaan siirtämällä kosinikäyrää oikealle $\frac{\pi}{2}$:n verran:

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x\,.$$

(2)

$$\sin(-x) = -\sin x.$$
$$\cos(-x) = \cos x\,.$$

Siis sin on parillinen ja cos on pariton funktio.

Lause 9.29. *Kaikilla* $x \in \mathbb{R}$ *on voimassa* $|\sin x| \leq |x|$.

Todistus. Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa $t \in (0, x)$ siten, että

$$\sin x = \sin x - \sin 0 = D\sin(t) \cdot (x - 0) = (\cos t) \cdot x\,,$$

siis

$$|\sin x| \leq |\cos t||x| \leq |x|\,.$$

Lause 9.30. *Kaikilla* $x > 0$ *on voimassa* $\sin x < x$.

Todistus. Määritellään $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x - \sin x\,.$$

Osoitetaan, että funktio f on aidosti kasvava. Silloin kaikilla $x > 0$,

$$x - \sin x > f(0) = 0\,.$$

Funktio f on derivoituva,

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

ja $f'(x) \geq 0$ kaikilla x. Siis f on kasvava.

Jos olisi väli Δ, jossa

$$1 - \cos x = 0$$

(eli f ei olisi aidosti kasvava), niin

$$D(1 - \cos x) = \sin x = D0 = 0$$

kaikilla $x \in \Delta$, ja

$$D\sin x = \cos x = D0 = 0$$

kaikilla $x \in \Delta$. Siis $1 = 0$, mikä on ristiriita. Siis $\sin x < x$ kaikilla $x > 0$.

Määritelmä. Funktio tan määritellään seuraavasti.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Tangenttifunktion luonnollinen lähtöjoukko on

$$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\} =: A\,,$$

jossa tan on jatkuva.

Lisäksi

$$\begin{aligned} D\tan x &= D(\frac{\sin x}{\cos x}) \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

kaikilla $x \in A$.

Lisäksi

$$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0\,,$$

joten $\tan x$ on aidosti kasvava kaikilla väleillä $\Delta \subset A$. Erityisesti se on aidosti kasvava niin sanotulla perusvälillä $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Määritelmä. Funktio cot määritellään seuraavasti.

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}\,,$$

ja sen luonnollinen lähtöjoukko on

$$\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} =: B\,.$$

Joukossa B on $\cot x$ derivoituva ja siis myös jatkuva. Lisäksi

$$D\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Huomautus. Luvun π arviointi: Koska

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\,,$$

niin

$$\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Siis

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

sillä $\sin x > 0$ välillä $[0, \pi]$.

Koska edelleen

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x\,,$$

niin

$$\cos^2\frac{\pi}{4} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

ja siis

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Sovelletaan Differentiaalilaskennan väliarvolausetta funktioon cos välillä $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Tällöin on olemassa $t \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ siten, että

$$\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4} = (-\sin t)(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\,.$$

Siis

$$0 - \frac{1}{\sqrt{2}} = (-\sin t)\frac{\pi}{4}$$

ja

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{2}\sin t} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin t}\,,$$

missä $\sin t \neq 0$.

Koska välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ on sin aidosti kasvava, niin

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} < \sin t < \sin\frac{\pi}{2} = 1\,.$$

Siis

$$2\sqrt{2} < \pi = \frac{2\sqrt{2}}{\sin t} < 2\cdot 2 = 4\,.$$

Keväällä johdamme tarkemman metodin luvun π likiarvon laskemiseksi. Silloin tutustumme ns. potenssisarjoihin, jotka ovat tärkeitä matemaattisia työkaluja.

Seuraava asia on tärkeä!

Arkusfunktiot eli trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot. Koska trigonometriset funktiot eivät ole aidosti monotonisia, ei niillä sellaisenaan ole käänteisfunktioita. Rajoittamalla funktiot sopiviin väleihin, voidaan käänteisfunktiot kuitenkin määritellä.

(1) $\overline{\text{arc}}\sin x$. Koska sini on aidosti kasvava ja jatkuva välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, arvojoukkonaan väli $[-1, 1]$, on sinin rajoittumalla kyseiseen väliin olemassa käänteisfunktio, $\overline{\text{arc}}\sin x$, (lue: arcus sinin päähaara), joka on siis määritelty välillä $[-1, 1]$ arvojoukkonaan $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Merkinnällä $\arcsin x$ (ilman yläviivaa!) tarkoitetaan jokaista lukua (kulmaa) y, jolle $\sin y = x$. Toisin sanoen

$$y = \arcsin x\,.$$

Koska yhtälön $\sin y = x$ toteuttavia lukuja on äärettömän monta, saa $\arcsin x$ äärettömän monta arvoa,

$$\arcsin x = \begin{cases} \overline{\text{arc}}\sin x + n2\pi \\ \pi - \overline{\text{arc}}\sin x + n2\pi\,, \end{cases}$$

eikä $\arcsin x$ siis ole funktio! (Huomaa kuitenkin, että $\overline{\text{arc}}\sin x$ taas ON funktio.)

(2) $\overline{\text{arc}}\cos x$. Koska kosini on aidosti vähenevä ja jatkuva välillä $[0, \pi]$ arvojoukkonaan väli $[-1, 1]$, on kosinin rajoittumalla kyseiseen väliin olemassa käänteisfunktio $\overline{\text{arc}}\cos x$, joka on siis määritelty välillä $[-1, 1]$ arvojoukkonaan $[0, \pi]$.

Määrittelemällä merkintä $\arccos x$ lukuna y, jolle $\cos y = x$, toisin sanoen

$$y = \arccos x \Longleftrightarrow \cos y = x\,,$$

saa $\arccos x$ äärettömän monta arvoa, nimittäin

$$\arccos x = \begin{cases} \overline{\text{arc}}\cos x + n2\pi \\ \pi - \overline{\text{arc}}\cos x + n2\pi\,. \end{cases}$$

(3) $\overline{\text{arc}}\tan x$. Koska tangentti on välillä $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aidosti kasvava ja jatkuva arvojoukkonaan koko $\mathbb{R}$, on tangentin rajoittumalla kyseiseen väliin käänteisfunktio $\overline{\text{arc}}\tan x$, joka on siis määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä arvojoukkonaan $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Määrittelemällä $\arctan x$ lukuna y, jolle $\tan x = y$, toisin sanoen

$$y = \arctan x \Longleftrightarrow \tan y = x\,,$$

saa $\arctan x$ äärettömän monta arvoa, nimittäin

$$\arctan x = \overline{\text{arc}}\tan x + n\pi\,.$$

Huomaa, että tangenttifunktion jakso on π.

Tärkeä huomautus: Kaikkein tärkein arcusfunktioista on $\overline{\text{arc}}\tan x$, koska se on määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä ja $D\overline{\text{arc}}\tan x = \frac{1}{1+x^2}$ Funktion tärkeys piilee muun muassa siinä, että kun $\frac{1}{1+x^2}$ integroidaan, niin saadaan $\overline{\text{arc}}\tan x$.

(4) $\overline{\text{arc}}\cot x$. Määrittelemällä

$$y = \operatorname{arc}\cot x \Longleftrightarrow \cot y = x\,,$$

saa $\operatorname{arc}\cot x$ äärettömän monta arvoa

$$\operatorname{arc}\cot x = \overline{\text{arc}}\cot x + n\pi\,,$$

missä $\overline{\text{arc}}\cot x$ on koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty käänteisfunktio funktion $\cot x$ rajoittumalle väliin $(0, \pi)$.

Kootaan saadut tulokset vielä yhteen:

Lause 9.31. *Rajoittumafunktioilla*

$$\sin x \Big| [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$
$$\cos x \Big| [0, \pi]\,,$$
$$\tan x \Big| (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$$
$$\cot x \Big| (0, \pi)\,,$$

on olemassa käänteisfunktiot

$$\overline{\mathrm{arc}}\sin x\,,$$
$$\overline{\mathrm{arc}}\cos x\,,$$

jotka on määritelty välillä $[-1, 1]$*, ja käänteisfunktiot*

$$\overline{\mathrm{arc}}\tan x\,,$$
$$\overline{\mathrm{arc}}\cot x\,,$$

jotka on määritelty koko $\mathbb{R}$*:ssä.*

Käänteisfunktiot ovat derivoituvia ja

$$D\overline{\mathrm{arc}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$
$$D\overline{\mathrm{arc}}\cos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$
$$D\overline{\mathrm{arc}}\tan x = \frac{1}{1+x^2}\,,$$
$$D\overline{\mathrm{arc}}\cot x = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Todistus. Olkoon $|x| < \frac{\pi}{2}$ ja $x = \sin y$ eli $y = \overline{\mathrm{arc}}\sin x$. Silloin

$$D\overline{\mathrm{arc}}\sin x = \frac{1}{D\sin y} = \frac{1}{\cos y}$$
$$= \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Negatiivinen ratkaisu ei nyt kelpaa, sillä $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Edelleen

$$D\overline{\mathrm{arc}}\cos x = \frac{1}{D\cos y} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$
$$D\overline{\mathrm{arc}}\tan x = \frac{1}{D\tan y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\,,$$
$$D\overline{\mathrm{arc}}\cot x = \frac{1}{D\cot y} = \frac{1}{-(1+\cot^2 y)} = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

LOPPU.