Loppuviikon 49 tehtävät

Tommi Hyvärinen

December 2, 2012

O3:

Laske $f'(2)$ kun kaikilla x on $f(x) = \text{arsinh}x$

Rarkaisu: Monisteen nojalla $f'(x) = 1/\sqrt{x^2+1}$ (kaikilla $x \in \mathbb{R}$). Todistus edellämainitulle on täsmälleen samanlainen kuin tehtävässä K6, kunhan vain neliöjuuren sisällä oleva miinusmerkki korvataan plussalla. Joten

$$f'(2) = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

O4:

Missä funktio $f(x) := \sin x$ on konveksi?

Ratkaisu: Monisteen nojalla välillä $\triangle$ kahdesti derivoituvan funktion f kuvaaja on konveksi, joss $f''(x) \geq 0$ koko välillä. Huomataan, että f on äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva kaikkialla. Edelleen $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x \geq 0 \iff \sin x \leq 0 \iff x \in [\pi + 2\pi n,\ 2\pi(n+1)]$, $n \in \mathbb{Z}$.

K4:

Tarkastellaan funktioita $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ missä $f(x) = x + \sin x$ ja $g(x) = x/2 + \sin x$. Selvitä funktioiden lokaalit ääriarvot.

Ratkaisu: Ensin funktio f. Huomataan, että f on kaikkialla äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva, joten lokaalit ääriarvoehdokkaat saadaan derivaatan nollakohdista $f'(x) = 1 + \cos x = 0$

$$\Rightarrow \cos x = -1,\ x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Kyseessä ei kuitenkaan ole lokaalit ääriarvot vaan ns. käännepisteitä. Tämä voidaan näyttää laskemalla toisen derivaatan arvot löydetyissä ääriarvoehdokaspisteissä, toteamalla ne nolliksi ja huomaamalla, että f'' vaihtaa merkkiä ohitettaessa kyseiset pisteet: $f''(x) = -\sin x,\ f''(\pi n) = -\sin \pi n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Funktio g. Huomataan, että g on kaikkialla äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva, joten lokaalit ääriarvoehdokkaat saadaan derivaatan nollakohdista $g'(x) = 1/2 + \cos x = 0$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2n \text{ tai } x = \frac{5\pi}{3} + 2n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Tarkastellaan toista derivaattaa $g''(x) = -\sin x$, ja $g''(\frac{\pi}{3} + 2n) = -\sin(\frac{\pi}{3} + 2n) < 0$ ja $g''(\frac{5\pi}{3} + 2n) = -\sin(\frac{5\pi}{3} + 2n) > 0$ kaikilla n, joten kohdissa $x = \frac{\pi}{3} + 2n$ kyseessä todellakin on lokaaleja maksimeja ja kohdissa $x = \frac{5\pi}{3} + 2n$ lokaaleja minimejä. Näissä pisteissä g saa arvoja $g(\frac{\pi}{3} + 2n) = \frac{\pi}{6} + n + \sin(\frac{\pi}{3} + 2n) = \frac{\pi}{6} + n + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $g(\frac{5\pi}{3} + 2n) = \frac{5\pi}{6} + n + \sin(\frac{5\pi}{3} + 2n) = \frac{5\pi}{6} + n - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

K5:

Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla x > 0 pätee $\cos x > 2 - \cosh x$

Ratkaisu: Olkoon $x > 0$ ja $f(x) = \cos x + \cosh x$. Nyt väite on yhtäpitävä kaavan $f(x) - 2 > 0$ kanssa. Osoitetaan tämä. Ensiksi huomataan $f'(x) = \mathrm{sinh}x - \sin x$ ja $f(0) = 2$. Myöskin f on kiltisti käyttäytyvä (esim. kaikkialla jatkuvasti derivoituva), joten väliarvolausetta voidaan soveltaa. Jollakin $t \in (0, x)$ pätee seuraava:

$$f(x) - 2 = f'(t)(x - 0) = (\mathrm{sinh}t - \sin t)x$$

Oletuksen nojalla $x > 0$, joten $f(x) - 2 > 0$ jos voidaan osoittaa, että $\mathrm{sinh}t - \sin t > 0$ (*) kaikilla $t > 0$: Oletetaan tiedetyksi $t > \sin t$ kaikilla $t > 0$ (voidaan osoittaa helposti tutkimalla funktion $t - \sin t$ derivaattaa tai hyödyntämällä sinin sarjakehitelmää). Huomataan, että kaava (*) seuraa, jos osoitamme $g(t) := \mathrm{sinh}t - t = (1/2)(e^t - e^{-t}) - t > 0$ (**)

$$g(0) = 0,\ g'(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1$$

Kaava (**) seuraa, mikäli $g(t)$ on kasvava, eli että $g'(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1 > 0$ (***).

$$g'(0) = 0,\ g''(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

Kaava (***) seuraa, mikäli $g'(t)$ on kasvava, eli että $g''(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) > 0$ (****).

$$g''(0) = 0,\ g'''(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

Kaava (****) seuraa, mikäli $g''(t)$ on kasvava, eli että $g'''(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) > 0$. Näin selvästikin on, koska e^t ja e^{-t} ovat nollaa suurempia kaikilla $t > 0$. Siispä väite on todistettu. Vielä kertaus: (****)$\Longrightarrow$(***)$\Longrightarrow$(**)$\Longrightarrow$(*)$\Longrightarrow$itse väite.

K6:

Johda yhtälö $D\mathrm{arcosh}x = 1/\sqrt{x^2 - 1}$ kun x > 1.

Ratkaisu: Monisteen nojalla $\mathrm{arcosh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Merkitään $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Nyt

$$D\mathrm{arcosh}x = D\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x}{(x + \sqrt{x^2 - 1})\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 - 1})\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$