MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Tehtävät viikolle 47, loppuviikko
Ratkaisuja (Markus Linnakaari)

O3. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[1,3]$ ja derivoituva välillä $]1,3[$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]1,3[$ pätee $1 < f'(x) < 4$. Mitä tiedetään arvosta $f(3)$, jos $f(1) = 1$? Miten voit perustella tuloksesi kurssilla tähän mennessä olleiden tietojen nojalla?

Ratkaisu. Väliarvolauseen oletukset pätevät, joten on olemassa sellainen $\xi \in]1,3[$, että

$$f(3) - f(1) = f'(\xi)(3-1) = 2f'(\xi).$$

Oletuksen mukaan $f(1) = 1$, joten $f(3) = 2f'(\xi) + 1$. Koska $1 < f'(x) < 4$, niin $2 \cdot 1 + 1 < f(3) < 2 \cdot 4 + 1 \iff 3 < f(3) < 9$. Siis $f(3)$ on avoimella välillä $]3,9[$.

O4. Tulon derivoituvuussäännön johtaminen karakterisaatiolauseen avulla. Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia kohdassa x. Tällöin karakterisointilauseen nojalla on

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h)$$

ja

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h),$$

missä $\varepsilon_1(h) \to 0$ ja $\varepsilon_2(h) \to 0$ kun $h \to 0$. Muokkaa tuloa

$$(f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h))\,(g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h))$$

ja päättele sekä tulon fg derivoituvuus kohdassa x että tulon derivointisääntö.

Ratkaisu. Pyritään muokkaamaan karakterisaatiolauseen vuoksi tulo muotoon $(fg)(x+h) = fg(x) + Ah + h\epsilon(h)$ jollakin A, missä $\epsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Suoralla laskulla saadaan

$$\begin{aligned}
(fg)(x+h) &= (f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h))\,(g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h)) \\
&= f(x)g(x) + f(x)g'(x)h + f(x)h\epsilon_2(h) + f'(x)g(x)h + f'(x)g'(x)h^2 \\
&\quad + f'(x)h^2\epsilon_2(h) + h\epsilon_1(h)(g(x) + g'(x) + h\epsilon_2(h)) \\
&= f(x)g(x) + h(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) \\
&\quad + h\underbrace{(f(x)\epsilon_2(h) + f'(x)g'(x)h + f'(x)h\epsilon_2(h) + \epsilon_1(h)(g(x) + g'(x) + h\epsilon_2(h)))}_{\overset{merk.}{=}\epsilon(h)} \\
&= f(x)g(x) + h(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) + h\epsilon(h).
\end{aligned}$$

Tutkitaan, päätekö $\epsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$.

$$\begin{aligned}
\epsilon(h) &= f(x)\epsilon_2(h) + f'(x)g'(x)h + f'(x)h\epsilon_2(h) + \epsilon_1(h)(g(x) + g'(x) + h\epsilon_2(h)) \\
&\to f(x)\cdot 0 + f'(x)g'(x)\cdot 0 + f'(x)\cdot 0\cdot 0 + 0(g(x) + g'(x) + 0\cdot 0) = 0,
\end{aligned}$$

kun $h \to 0$. Siispä karakterisaatiolauseen nojalla fg on derivoituva kohdassa x ja sen derivaatta on $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.

K4. Määritellään $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = \sqrt{x}$ kun $x \geq 0$ ja $f(x) = -\sqrt{-x}$ kun $x < 0$. Missä f on derivoituva?

Ratkaisu. Osoitetaan, että funktio on derivoituva kaikkialla muualla paitsi kohdassa $x = 0$.
Kun $x > 0$, niin (esimerkiksi funktion f:n käänteisfunktion $g(x) = x^2$ $(x > 0)$ avulla) $f'(x) = D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Vastaavasti, kun $x < 0$, niin ulkofunktiona on $-\sqrt{x}$ ja sisäfunktiona $-x$. Siten $f'(x) = D(-\sqrt{-x}) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}$. Näin ollen $f'(x)$ on olemassa kaikilla $x \neq 0$. Tutkimalla esimerkiksi erotusosamäärän toispuoleista raja-arvoa kun $x \to 0_+$, saadaan että

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty,$$

kun $x \to 0_+$. Näin ollen erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 0$.
Siten f ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$.
Vastaus: f on derivoituva, kun $x \neq 0$.

K5. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^5$. Tulkitse yhtälö

$$(a + h)^5 = a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5$$

karakterisaatiolauseen avulla. Mikä on tässä $f(a)$, mikä $f'(a)h$ ja mikä $h\,\varepsilon(h)$? Voidaanko funktion derivaatta kohdassa $x = a$ nähdä suoraan kyseisestä yhtälöstä?

Ratkaisu. Jos f on derivoituva, niin karakterisaatiolauseen mukaan voidaan asettaa

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + h\epsilon(h),$$

missä $\epsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$.
Termissä $f(x + h)$ ei tule olla kertoimenaan mitään h, joten $f(a + h) = (a + h)^5$. Termissä $f(x)$ ei tule olla kertoimena mitään h, joten kelpaa $f(a) = a^5$. Vastavaavasti termiksi $f'(x)h$ kelpaa jokin sellainen, missä on kertoimena pelkkä h, siis $f'(a)h = 5a^4h$. Lopuissa jäljellä olevissa termeissä on kaikissa kertoimena vähintään h:n neliö, joten $h\epsilon(h) = 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5$.

$$\underbrace{(a + h)^5}_{f(a+h)} = \underbrace{a^5}_{f(a)} + \underbrace{5a^4h}_{f'(a)h} + \underbrace{10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5}_{h\epsilon(h)}.$$

Karakterisaatiolauseen perustella siis $f'(a) = 5a^4$.

K6. Oletetaan, että $p > 0$. Osoita, että yhtälöllä $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ on enintään kaksi erisuurta reaalijuurta. Vihje: Merkitse yhtälön vasen puoli $= f(x)$. Muista Rollen lause ja väliarvolause!

Ratkaisu. Asetetaan vihjeen mukaisesti

$$f(x) = x^4 + px^2 + qx + r.$$

Väliarvolauseen (erityisesti Rollen lauseen) oletukset pätevät, sillä f on kaikkialla jatkuva ja derivoituva.
Tutkitaan f:n ensimmäistä ja toista derivaattaa:

$$f'(x) = 4x^3 + 2px + q$$

ja

$$f''(x) = 12x^2 + 2p > 0 + 2p = 2p > 0.$$

Siten f' on aidosti kasvava $\mathbb{R}$:ssä. Tehdään vastaoletus: löytyy vähintään kolme erisuurta reaalijuurta.
Olkoon ne a, b, ja c, missä $a < b < c$. Rollen lauseen mukaan nyt on olemassa sellaiset $\xi_1 \in]a, b[$ ja $\xi_2 \in]b, c[$, että $f'(\xi_1) = 0$ ja $f'(\xi_2) = 0$, joten $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Kuitenkin $\xi_1 < b < \xi_2$, ja $f'(x)$ on aidosti kasvava, joten $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$. Ristiriita. $\square$