Analyysi I, viikko 46

Malliratkaisut loppuviikon tehtäviin, Katriina Kerokoski

15. marraskuuta 2012

O3. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x + x^3$ määritellyllä funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mitä ominaisuuksia tiedät tälle käänteisfunktiolle?

Ratkaisu.

Funktio f on polynomifunktio ja siten kaikkialla jatkuva. Lisäksi tiedetään, että kun $x_1 < x_2$, pätee $x_1^3 < x_2^3$ ja edelleen $x_1 + x_1^3 < x_2 + x_2^3$. Siis funktio f on myös kaikkialla aidosti kasvava. Tämän perusteella tiedetään, että funktiolla f on aidosti kasvava ja jatkuva käänteisfunktio. Todistetaan vielä, että funktio f saa kaikki arvot välillä $]-\infty, \infty[$. Mielivaltaisella $M > 0$ pätee, että kun $x_M = M$ ja $x > x_M$, niin $f(x) = x + x^3 > x > x_M = M$. Vastaavasti kun valitaan $x_m = -M$ ja $x < x_m$, pätee $f(x) = x + x^3 < x < x_m = -M$. Suljetulla välillä $[-M, M]$ funktio f on jatkuva, joten Bolzanon lauseen mukaan funktio f saa kaikki arvot tällä välillä. Koska $f(x) < -M$, kun $x < x_m = -M$, ja $f(x) > M$, kun $x > x_M = M$, ja f on jatkuva, niin f saa välillä $[-M, M]$ kaikki arvot väliltä $[-M, M]$. Koska M on oletuksen mukaan mielivaltainen, funktio f saa kaikki arvot väliltä $]-\infty, \infty[$, kun $x \in]-\infty, \infty[$. Siis funktion f käänteisfunktio on määritelty kaikkialla.

O4. Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita ehdolla $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ määritelty funktio saa, on pienin arvo. Toisin sanoen osoita, että on olemassa sellainen a, että kaikilla x pätee $f(x) \geq f(a)$.

Ratkaisu.

Aivan ensiksi havaitaan, että $f(x)$ on polynomifunktio ja siten jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska polynomin $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ suurin potenssi on parillinen, voidaan päätellä, että funktio kasvaa rajatta sekä silloin, kun x kasvaa rajatta, että silloin, kun x pienenee rajatta. Tutkitaan näitä tapauksia erikseen. Kun $x > 3$, pätee

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = x^3(x-2) + x^2(3x-4) + 5 \geq x^3 + x^2 + 5 > x.$$

Mielivaltaiselle $M > 0$ pätee siis, että kun $x_M = \max\{3, M\}$, kaikilla $x > x_M$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 > x > x_M \geq M.$$

Tutkitaan seuraavaksi funktion kulkua siinä tapauksessa, että x pienenee rajatta. Kaikilla $x < -1$ pätee

$$f(x) = x^4-2x^3+3x^2-4x+5 = x^2(x^2+3)+(-x)(2x^2+4)+5 \geq x^2+(-x)+5 > -x.$$

Mielivaltaiselle $M > 0$ pätee näiden arvioiden perusteella, että kun $x_m = \min\{-1, -M\}$ ja $x < x_m$, niin

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 > -x > -x_m \geq M.$$

Seuraavaksi havaitaan, että $f(0) = 5$. Valitaan esimerkiksi $M = 10$, jolloin $M > f(0) = 5$. Kun $M = 10$, niin $x_M = M = 10$ ja $x_m = -M = -10$, joten voimme tarkastella välejä $]-\infty, -10[$ ja $]10, \infty[$. Funktion rajatta kasvamisen määritelmän nojalla, kun $x < x_m = -10$, niin $f(x) > M = 10$, ja kun $x > x_M = 10$, niin $f(x) > M = 10$. Toisaalta tietojemme perusteella f on määritelty ja jatkuva suljetulla välillä $[-10, 10]$, joten Weierstrassin min-max -lauseen mukaan f saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvon. On siis olemassa $a \in [-10, 10]$, jolla pätee $f(x) \geq f(a)$ kaikilla $x \in [-10, 10]$. Lisäksi aiemmin on todettu, että $f(0) = 5 < 10$ ja $f(x) > 10$, kun $x < -10$ tai $x > 10$. Tämän perusteella $f(a) \leq 5 < 10 < f(x)$, kun $x < -10$ tai $x > 10$. Siis kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $f(a) \leq f(x)$.

K4. Osoita, että yhtälölllä $f(x) = x+x^3$ määritellyllä funktiolla $f\colon [0,1] \to [0,2]$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon [0,2] \to [0,1]$.

Ratkaisu.

Tehtävässä O3 osoitettiin, että funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^3$, on olemassa jatkuva ja kasvava käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siis funktiolla f on olemassa jatkuva ja kasvava käänteisfunktio myös välillä $[0, 1]$. Koska pätee $f(0) = 0 + 0^3 = 0$ ja $f(1) = 1 + 1^3 = 2$, niin pätee $f^{-1}(0) = 0$ ja $f^{-1}(2) = 1$. Koska f^{-1} on kasvava, pätee nyt $f^{-1}(x) \in [0, 1]$, kun $x \in [0, 2]$. Koska f on jatkuva kaikkialla, se on jatkuva myös välillä $[0, 1]$, ja saa Bolzanon lauseen mukaan kaikki arvot tältä väliltä. Siis funktiolla $f : [0, 1] \to [0, 2]$ on käänteisfunktio $f^{-1} : [0, 2] \to [0, 1]$.

K5. Määritellään funktio $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$. Onko se aidosti kasvava? Entä jatkuva? Onko funktiolla f käänteisfunktiota?

Ratkaisu.

Funktio $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ on aidosti kasvavan ja jatkuvan funktion $x \mapsto x^3$ käänteisfunktio, ja siten aidosti kasvava ja jatkuva. Samoin funktio $x \mapsto \sqrt[5]{x}$ on aidosti kasvavan ja jatkuvan funktion $x \mapsto x^5$ käänteisfunktiona aidosti kasvava ja jatkuva. Myös $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$ on jatkuvien funktioiden summana jatkuva välillä $[0, \infty[$. Juurifunktioiden kasvavuuden nojalla, kun $0 \leq x_1 < x_2$, pätee $\sqrt[3]{x}_1 < \sqrt[3]{x}_2$ ja $\sqrt[5]{x}_1 < \sqrt[5]{x}_2$, joten pätee $\sqrt[3]{x}_1 + \sqrt[5]{x}_1 < \sqrt[3]{x}_2 + \sqrt[5]{x}_2$. Siis funktio f on aidosti kasvava, joten lauseen 6.9 perusteella sillä on olemassa käänteisfunktio.

K6. Oletetaan, että jatkuva funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikilla x epäyhtälön $0 \leq f(x) \leq 3$. Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita yhtälöllä

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$$

määritelty funktio saa, on suurin arvo. Toisin sanoen osoita, että on olemassa sellainen a, että kaikilla x pätee $g(x) \leq g(a)$.

Ratkaisu.

Havaitaan ensin, että koska f ja polynomifunktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 1$ ovat jatkuvia kaikilla $x \in \mathbb{R}$, myös $g(x)$ on jatkuvien funktioiden yhdisteenä kaikkialla jatkuva. Samoin kaikilla x pätee $g(x) \geq 0$. Näyttäisi siltä, että funktion g arvot lähestyisivät nollaa, kun x kasvaa rajatta tai vähenee rajatta. Todistetaan tämä erikseen kummallakin puolella. Oletetaan $\epsilon > 0$. Valitaan $x_\epsilon = \max\{1, 3/\epsilon\}$ ja $x > x_\epsilon$. Nyt pätee

$$\left| \frac{f(x)}{x^2 + 1} - 0 \right| \leq \frac{3}{x^2 + 1} \leq \frac{3}{x} < \frac{3}{x_\epsilon} \leq \frac{3}{\frac{3}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Oletetaan edelleen $\epsilon > 0$, ja valitaan tällä kertaa $x_\epsilon = \min\{-1, -3/\epsilon\}$ ja $x < x_\epsilon$. Nyt pätee

$$\left| \frac{f(x)}{x^2 + 1} - 0 \right| \leq \frac{3}{x^2 + 1} \leq \frac{3}{-x} < \frac{3}{-x_\epsilon} \leq \frac{3}{-(-\frac{3}{\epsilon})} = \epsilon.$$

Seuraavaksi huomataan, että jos kaikilla x pätee $f(x) = 0$, kaikilla x pätee myös $g(x) = 0$. Tällöin mikä tahansa $x \in \mathbb{R}$ kelpaa pisteeksi a. Oletetaan siis, että välillä $[-b_1, b_1]$ jollain x_1 pätee $f(x_1) > 0$, ja siten $g(x_1) > 0$. Toisaalta tiedetään, että kun valitaan $\epsilon = (1/10)g(x_1)$, niin funktion raja-arvon perusteella on olemassa sellainen väli $[-b_2, b_2]$, että kaikilla $x > b_2$ tai $x < -b_2$ pätee $0 \leq g(x) < (1/10)g(x_1)$. Valitaan nyt $b = \max\{b_1, b_2, 1\}$ ja määritellään väli $[-b, b]$. Funktio g on jatkuva tällä välillä, joten Weierstrassin min-max -lauseen mukaan se saa tällä välillä suurimman arvon. Olkoon a se piste, missä f saa välillä $[-b, b]$ suurimman arvon. Nyt kaikilla $x \in [-b, b]$ pätee $g(a) \geq g(x)$ ja kaikilla $x > b$ ja $x < -b$ pätee $g(a) \geq g(x_1) > (1/10)g(x_1) > g(x)$, joten kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $g(a) \geq g(x)$.