Malliratkaisut, loppuviikko 45
Analyysi I, syksy 2012
Katriina Kerokoski

03. Oletetaan, että funktio $f:]0,2[\to \mathbb{R}$ on kasvava. Oletetaan, että se ei ole jatkuva kohdassa $x=1$. Mitä tällöin tiedämme?

Ratkaisu.

Yleisessä tapauksessa, jos funktio f on epäjatkuva pisteessä x_0, emme tiedä mitään funktion f arvosta pisteessä x_0 tai sen käyttäytymisestä pisteen x_0 ympäristössä. Koska nyt kuitenkin tiedämme, että f on kasvava, voimme tehdä joitakin johtopäätöksiä.

Koska f on kasvava, tiedetään, että pätee $f(x) \leq f(y)$, kun $x<y$. Tämän perusteella pätee esimerkiksi $f(\frac{1}{2}) \leq f(1) \leq f(\frac{3}{2})$, ja kaikilla $h>0$ pätee $f(1-h) \leq f(1) \leq f(1+h)$. Funktio f ei siis voi saada mielivaltaisen suuria tai pieniä arvoja, vaan aina pätee $f(x) \leq f(1) \leq f(y)$, kun $x \in]0,1[$ ja $y \in]1,2[$.

Lisäksi monisteen lause 5.9. sanoo, että jos $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ on kasvava, pätee

- jos f on ylhäältä rajoitettu, niin on olemassa
  $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x \in]a, b[$

- jos f on alhaalta rajoitettu, niin on olemassa
  $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x \in]a, b[\}$

Havaitaan, että kun $x \in]0,1[$, niin $f(x) \leq f(\frac{3}{2})$, ja vastaavasti, kun $x \in]1,2[$, niin $f(x) \geq f(\frac{1}{2})$. Siis f on ylhäältä rajoitettu välillä $]0,1[$ ja alhaalta rajoitettu välillä $]1,2[$.
Tällöin on olemassa

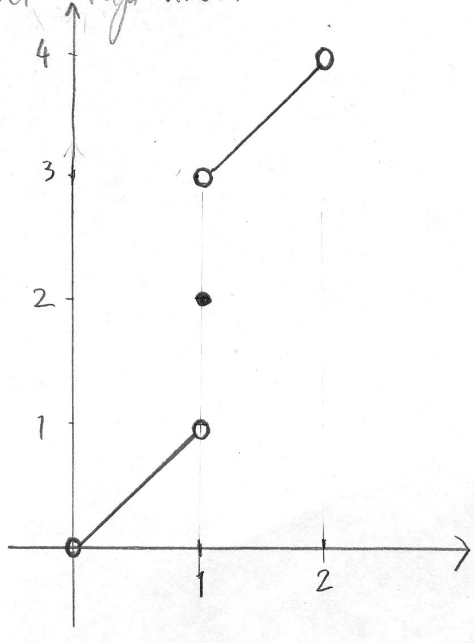
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x \in]0,1[\}$$

ja $$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x \in]1,2[\}.$$

On siis olemassa myös toispuoleiset raja-arvot $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ ja $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

Lopuksi määrittelen vielä esimerkkifunktion $f:]0,2[\to \mathbb{R}$, jolle $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq f(1) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in]0,1[\\ 2, & \text{kun } x = 1 \\ x+2, & \text{kun } x \in]1,2[\end{cases}$$



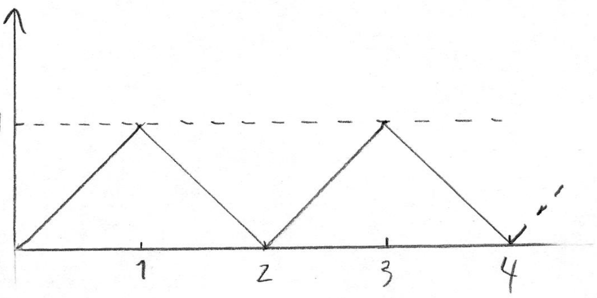
04. Oletetaan, että funktio $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikille $n = 0, 1, 2 \ldots$ ehdot $f(x) = x - 2n$ kun $2n \leq x \leq 2n+1$ ja $f(x) = 2n + 2 - x$ kun $2n+1 < x < 2n+2$.

Piirrä funktion kuvaaja. Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \,?$$

Ratkaisu. Tutkitaan ensin tilannetta joillakin pienillä n:n arvoilla ja piirretään funktion f kuvaaja:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2, & \text{kun } 1 < x < 2 \\ x-2, & \text{kun } 2 \leq x \leq 3 \\ -x+4, & \text{kun } 3 < x < 4 \\ x-4, & \text{kun } 4 \leq x \leq 5 \\ \vdots & \end{cases}$$



Osoitetaan, että raja-arvoa $\lim_{x \to \infty} f(x)$ ei ole olemassa. Tehdään vastaoletus: on olemassa $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$. Nyt raja-arvon määritelmän nojalla jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku M, että aina kun $x > M$, niin $|f(x) - a| < \varepsilon$. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{3}$, jolloin on olemassa sellainen $M_{\frac{1}{3}}$, että

$$|f(x) - a| < \frac{1}{3}, \quad \text{kun } x > M_{\frac{1}{3}}.$$

Huomataan, että kaikilla $n = 0, 1, 2 \ldots$ pätee $f(2n) = 0$ ja $f(2n+1) = 1$. Olkoon nyt n sellainen kokonaisluku, että $2n > M_{\frac{1}{3}}$ (ja $2n+1 > M_{\frac{1}{3}}$). Valitaan $x_1 = 2n$

ja $x_2 = 2n+1$. Nyt vastaoletuksen ja valinnan $2n > M_{\frac{1}{3}}$ nojalla pätee

$$|f(x_1) - a| < \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad |f(x_2) - a| < \frac{1}{3}.$$

Toisaalta pätee $f(x_1) = f(2n) = 0$ ja $f(x_2) = f(2n+1) = 1$. Tästä seuraa, että

$$1 = |1-0| = |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(x_2) - a + a|$$
$$= |(f(x_1) - a) + (-1)\cdot(f(x_2) - a)| \overset{*}{\leq} |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Saamme siis aikaan ristiriidan, joten alkuperäinen väite on tosi, ja ei ole olemassa $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

* selitys: kolmioepäyhtälö

K4. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{5+x}{3-x} = -\infty.$$

Ratkaisu. Kyseessä on oikeanpuoleinen raja-arvo. Pyritään siis löytämään mielivaltaiselle $m < 0$ sellainen $\delta > 0$, että $f(x) < m$, kun $3 < x < 3 + \delta$. Koska nyt $x > 3$, pätee $(x-3) > 0$. Arvioidaan nyt funktion f arvoja ylöspäin:

$$\frac{5+x}{3-x} = \frac{-(5+x)}{x-3} \leq \frac{-8}{x-3}.$$

(huom: kun $x > 3$, niin $5 + x > 8$, ja $-(5+x) < -8$)

Halutaan, että $-8/(x-3) < m$, jolloin

$$-8 < m(x-3)$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-3) < -\frac{8}{m}$$

(huom: tässä $(x-3) > 0$ ja $m < 0$)

Etsimämme on nyt $\delta = -\frac{8}{m}$. Voimme muotoilla varsinaisen todistuksen.

Olkoon $m<0$. Valitaan $\delta = -8/m$. Nyt kun $3 < x < 3 + (-8/m)$ pätee, että

$$\frac{5+x}{3-x} \leq \frac{-8}{x-3} < \frac{-8}{\frac{-8}{m}} = m \square$$

K5. Oletetaan, että $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ on kasvava ja että $a < c < b$. Osoita, että

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x).$$

<u>Todistus.</u> Käytetään taas lausetta 5.9. (ks. 03). Osoitetaan aluksi epäyhtälön vasen puoli. Koska funktio f on kasvava välillä $]a,b[$ ja $a<c<b$, niin f on kasvava myös välillä $]a,c[$. Lisäksi f on välillä $]a,c[$ ylhäältä rajoitettu, sillä kaikilla $x \in]a,c[$ pätee $f(x) \leq f(c)$. Nyt lauseen 5.9. perusteella

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x \in]a,c[\}.$$

Koska $f(c)$ on joukon $\{ f(x) \mid x \in]a,c[\}$ eräs yläraja, pätee lisäksi

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x \in]a,c[\} \leq f(c).$$

Osoitetaan sitten vastaavasti epäyhtälön oikea puoli. Koska funktio f on kasvava välillä $]a,b[$ ja $a<c<b$, niin f on kasvava myös välillä $]c,b[$, ja koska kaikilla $x \in]c,b[$ pätee $f(x) \geq f(c)$, niin f on välillä $]c,b[$ alhaalta rajoitettu.

Siis lauseen 5.9 perusteella
$$\lim_{x \to c+} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x \in]c, b[\},$$
ja koska $f(c)$ on joukon $\{ f(x) \mid x \in]c, b[\}$ eräs alaraja, pätee
$$f(c) \leq \inf \{ f(x) \mid x \in]c, b[\} = \lim_{x \to c+} f(x). \square$$

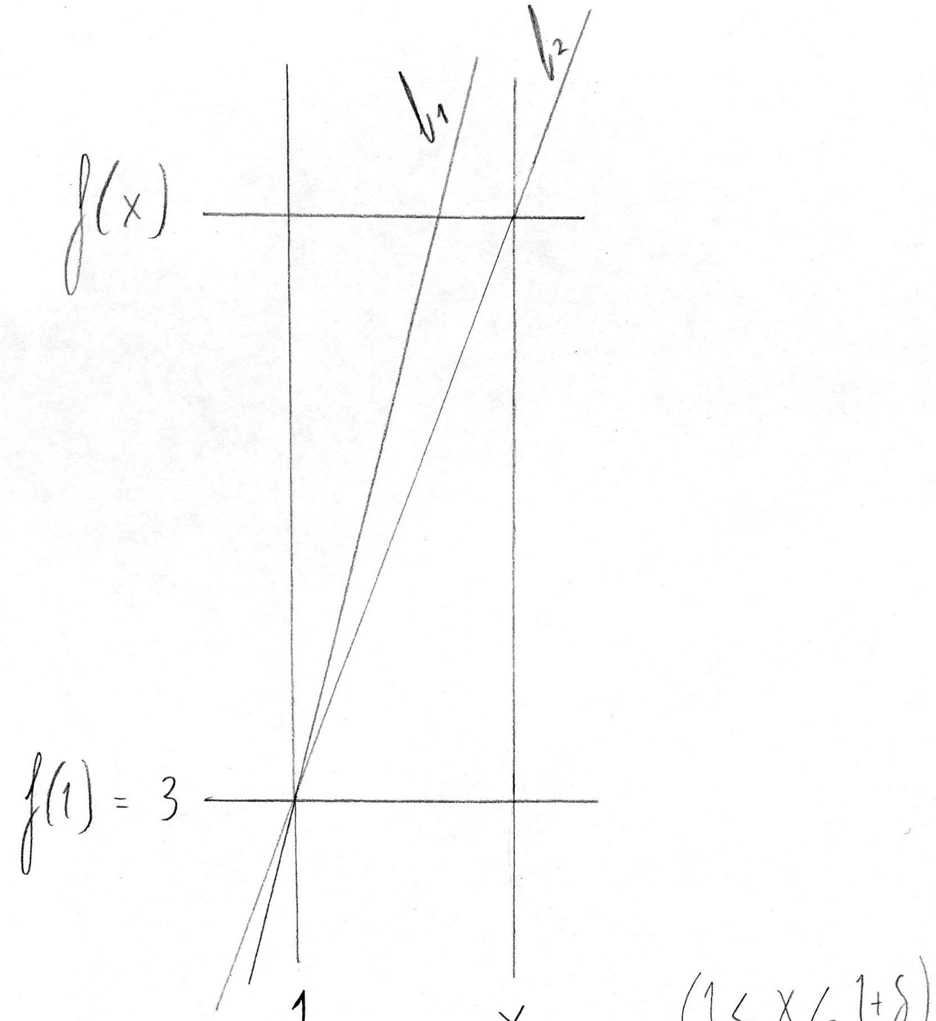
K6. Oletetaan, että $f:]0,2[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(1) = 3$ ja $f'(1) = 5$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla x pätee: jos $1 < x < 1 + \delta$, niin $(5 - \frac{1}{7})(x-1) < f(x) - 3 < (5 + \frac{1}{7})(x-1)$.

<u>Ratkaisu.</u>

Sovelletaan funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään $E(x) = (f(x) - f(1))/(x-1)$. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{7}$. Koska oletuksen mukaan $f'(1) = 5$, niin erotusosamäärällä $E(x)$ on raja-arvo 5 pisteessä 1. Jollakin $\delta > 0$ pätee siis, että aina kun $1 < x < 1 + \delta$, niin
$$|E(x) - 5| < \frac{1}{7}$$
$$\overset{\text{itseisarvolemma}}{\iff} -\frac{1}{7} < E(x) - 5 < \frac{1}{7}$$
$$\iff 5 - \frac{1}{7} < E(x) < 5 + \frac{1}{7}$$
$$\iff 5 - \frac{1}{7} < \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < 5 + \frac{1}{7}$$
$$\overset{x > 1}{\iff} (5 - \tfrac{1}{7})(x-1) < f(x) - f(1) < (5 + \tfrac{1}{7})(x-1)$$
$$\iff (5 - \tfrac{1}{7})(x-1) < f(x) - 3 < (5 + \tfrac{1}{7})(x-1). \square$$

(Huomaa, että nyt $f(x)-3>0$, eli $f(x)>3=f(1)$. Se käy järkeen, sillä $x>1$, ja koska $f'(1)>0$, niin funktio f on jossain pisteen $x_0=1$ ympäristössä kasvava.)

Piirretään vielä tilanteesta kuva:



Kuvassa suoran l_1 kulmakerroin on $f'(1)=5$ ja suoran l_2 kulmakerroin $E(x)$, $5-\frac{1}{7}<E(x)<5+\frac{1}{7}$.