MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Ratkaisuehdotuksia loppuviikon 44 tehtäville
Jarno Lintusaari

O3. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on derivoituva kohdassa $x = 16$ ja että $f'(16) = 1/8$.

Ratkaisu.
Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min(\epsilon, 7)$. Nyt aina kun $|x - 16| < \delta$, niin $|x - 16| < 7$ eli $9 < x < 23$ ja

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(16)}{x-16} - \frac{1}{8}\right| &= \left|\frac{\sqrt{x}-4}{x-16} - \frac{1}{8}\right| = \left|\frac{8\sqrt{x}-32-x+16}{8(x-16)}\right| = \left|\frac{-x+8\sqrt{x}-16}{8(x-16)}\right| \\ &= \left|\frac{(\sqrt{x}-4)^2}{8(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-4}{8(\sqrt{x}+4)}\right| = \left|\frac{x-16}{8(\sqrt{x}+4)^2}\right| \\ &= |x-16|\frac{1}{8(\sqrt{x}+4)^2} \leq |x-16|\frac{1}{8(\sqrt{9}+4)^2} \leq |x-16| < \delta \leq \epsilon\end{aligned}$$

Pätee siis että $f'(16) = 1/8$.

O4. Määritellään funkto $f :]1, 4[\to \mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+1}.$$

Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio f on derivoituva kohdassa $x = 3$ ja että $f'(3) = -\frac{1}{49}$.

Ratkaisu.
Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min(\epsilon, 1)$. Nyt aina kun $|x-3| < \delta$, niin $|x-3| < 1$

eli $2 < x < 4$ ja

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)-f(3)}{x-3} - (-\frac{1}{49})\right| &= \left|\frac{\frac{x+1}{2x+1}-\frac{4}{7}}{x-3} + \frac{1}{49}\right| = \left|\frac{\frac{7x+7-8x-4}{7(2x+1)}}{x-3} + \frac{1}{49}\right| \\
&= \left|\frac{-x+3}{7(2x+1)(x-3)} + \frac{1}{49}\right| \\
&= \left|\frac{-49(x-3)+7(2x+1)(x-3)}{49\cdot 7(2x+1)(x-3)}\right| = \left|\frac{(x-3)(14x+7-49)}{49\cdot 7(2x+1)(x-3)}\right| \\
&= \left|\frac{14x-42}{49\cdot 7(2x+1)}\right| = \left|\frac{2x-6}{49(2x+1)}\right| = |x-3|\frac{2}{49(2x+1)} \\
&\leq |x-3|\frac{2}{49(2\cdot 2+1)} \leq |x-3| < \delta \leq \epsilon
\end{aligned}
$$

Pätee siis että $f'(3) = -(1/49)$.

K4. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{2x+1} = 1$$

on epätosi.

Ratkaisu.
Olkoon $\epsilon = 1/20$. Nyt riittää osoittaa, että erotusosamäärän erotus väitetystä raja-arvosta on aina suurempi kuin edellä valittu epsilon kunhan x on riittävän lähellä lukua 3. Annettua tehtävää tutkimalla huomaamme, että kun $|x-3| < 1/2$ eli $5/2 < x < 7/2$ niin

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)-f(3)}{x-3} - 1\right| &= \left|\frac{x+1}{2x-1} - 1\right| = \left|\frac{x+1-2x+1}{2x-1}\right| = \left|\frac{-x+2}{2x-1}\right| = \frac{|x-2|}{|2x-1|} \\
&= \frac{x-2}{2x-1} \geq \frac{\frac{5}{2}-2}{2\cdot\frac{7}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{12} \geq \epsilon
\end{aligned}
$$

K5. Oletetaan, että funktio g toteuttaa kaikilla $x \in]-1,1[$ epäyhtälön $|g(x)| < 7$. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 g(x)$ on derivoituva kohdassa $x = 0$ ja, että $f'(0) = 0$. Tutki rohkeasti erotusosamäärän etäisyyttä luvusta 0.

(Huomaa, että voi esimerkiksi olla $g(x) = 0$ kun x on rationaalinen ja $g(x) = 1$ kun x on irrationaalinen. Funktio voi olla siis tehtävän tuloksen perusteella olla derivoituva yhdessä kohdassa ja epäjatkuva kaikkialla muualla.)

Ratkaisu.
Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min(\epsilon/7, 1)$. Nyt aina kun $|x - 0| < \delta$, niin $|x| = |x - 0| < \delta < 1$ eli oletuksen mukaan |g(x)| < 7 jolloin myös

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0\right| = \left|\frac{x^2 g(x)}{x}\right| = |x||g(x)| \leq 7|x| < 7\delta \leq 7\frac{\epsilon}{7} = \epsilon$$

K6. Oletetaan, että $h > 0$ ja funktio f on määritelty kaikilla $x \in]x_0 - h, x_0 + h[$ ja että $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$, missä $b \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x \neq x_0$ pätee: jos $|x - x_0| < \delta$, niin $\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b|$. Vihje: voi auttaa, jos tarkastelet tapauksia $b < 0$ ja $b > 0$ erikseen. (Voit myös yrittää käyttää "kolmioepäyhtälön vasenta puolta".)

Ratkaisu.
Koska $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ niin on olemassa sellainen $\delta > 0$ että aina kun $|x - x_0| < \delta$ ja $x \neq x_0$ pätee että $|f(x) - b| < (1/2)|b|$, mistä itseisarvolemman avulla saadaan yhtäpitävästi että

$$-(1/2)|b| + b < f(x) < (1/2)|b| + b. \tag{1}$$

Väitämme että tämä δ kelpaa tehtävän ratkaisuksi. Osoitetaan ensiksi että $|f(x)| < (3/2)|b|$. Epäyhtälöä 1 jatkamalla saadaa, että

$$-(3/2)|b| = -(1/2)|b| - |b| \leq -(1/2)|b| + b < f(x) < (1/2)|b| + b \leq (3/2)|b|,$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa että $|f(x)| < (3/2)|b|$. Osoitetaan sitten että $(1/2)|b| < |f(x)|$. Jos $b > 0$ niin kaavan 1 vasemmanpuoleista epäyhtälöä jatkamalla saadaan, että

$$(1/2)|b| = (1/2)b = -(1/2)b + b = -(1/2)|b| + b < f(x) \leq |f(x)|$$

Jos taas $b < 0$ niin kaavan 1 oikeanpuoleisesta epäyhtälöstä saadaan että $f(x) < (1/2)|b| + b = (1/2)(-b) + b = (1/2)b$. Koska $b < 0$, niin myös $f(x) < 0$. Lisäksi edellisen epäyhtölän kääntämällä saamme että $|f(x)| = -f(x) > -(1/2)b = (1/2)|b|$.