03 Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty}(n^2-n)=\infty$$

R: Osoitetaan siis, että jokaista luku M kohti on olemassa kynnys K siten että kun $n>K$, niin $(n^2-n)>M$. valitaan $K>\max\{2, M\}$

Nyt: $$(n^2-n)=n(n-1)\overset{n\geq 2}{\geq} n(2-1)$$
$$= n \geq K > M$$ $\square$

04 Määritellään $f(x)=x^2+3x$ Osoita, että: $$\lim_{x\to 1} f(x)=4$$

Olkoon $\varepsilon>0$ valitaan $\delta<\min\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\}$

OL: $0<|x-1|<\delta\leq 1, \Rightarrow 0<x<2$

Nyt: $$|x^2+3x-4|=|x^2-1+3x-3|$$
$$=|(x-1)(x+1)+3(x-1)|$$ $0<x<2$
$$=(x+1+3)|x-1|\leq 6|x-1|<6\delta<6\frac{\varepsilon}{6}=\varepsilon$$
$\square$

Siis $$\lim_{x\to 1} f(x)=4$$

K4 Osoita, että $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty$

Välitulos: Induktiolla $2^n > n^3$, kun $n \geq 10$:

0-askel: $4 \cdot 2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$

induktiooletus $2^n > n^3$

induktioaskel: $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$$= n^3\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$$

$$\leq n^3\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n} + \frac{1}{n}\right) \quad \Big| \; n \geq 10$$

$$\leq n^3\left(1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\right)$$

$$\leq n^3 \cdot 2 < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1} \quad \square$$

Valitaan $K > \max\{10, M\}$, nyt kun $n > K$,

$$\frac{2^n}{n^2} > \frac{n^3}{n^2} = n > K > M$$

Siis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty$

K5. Osoita, että yhtälöllä $f(x)=\sqrt{x}$ määritelty funktio on jatkuva kohdassa $x=1$

R: Jatkuvuuden määritelmä kohdassa $x=1$:

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Todistetaan tämä: OL: $\varepsilon > 0$, $0<|x-1|<\delta<1$, valitaan $\delta < \varepsilon$

Nyt: $|f(x)-f(1)| = |\sqrt{x}-\sqrt{1}| = {}^{\sqrt{x}+1)}|\sqrt{x}-1|$

$= \left|\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}+1}|x-1| \leq 1\cdot|x-1| < \delta < \varepsilon$ $\square$.

Siis $f(x)$ on jatkuva kohdassa $x=1$.

K6. Osoita, että yhtälöllä $f(x)=\sqrt{x}$ määritelty funktio on derivoituva kohdassa $x=1$.

R: Derivaatan määritelmä kohdassa $x=1$: | lavennus-temppu

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ Arvataan raja-arvoa: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \xrightarrow{x\to 1} \frac{1}{2}$

Todistetaan $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$

valitaan $\delta<\varepsilon$ OL: $\varepsilon>0$, $0<|x-1|<\delta<1 \Leftrightarrow 0<x<2$

Nyt: $\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{2}\right| = {}^{\sqrt{x}+1)}\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+1)}\right|$

$= \left|\frac{1-x}{2(\sqrt{x}+1)^2}\right| = \frac{1}{2(\sqrt{x}+1)^2}|x-1| \leq \frac{1}{2(\sqrt{0}+1)^2}|x-1|$

$\leq \frac{1}{2}|x-1| < |x-1| < \delta < \varepsilon$ $\square$

Siis $f(x)$ derivoituva kohdassa $x=1$.