Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysi I
Tehtävät viikolle 40, loppuviikko
Ratkaisuja (Markus Linnakaari)

O3. Oletetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

ja että $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa kokonaisluku K, jolle kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Tehtävä on erityisen "läpinäkyvä", jos tarkastellaan erikseen tapauksia $a < 0$ ja $a > 0$. Piirrä kuva kummastakin tapauksesta.

Ratkaisu:
Valitaan $\epsilon = \frac{1}{2}|a| > 0$. Jono (x_n) suppenee, joten lukujonon raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa sellainen $K \in \mathbb{N}$, että kun $n > K$, niin

$$|x_n - a| < \epsilon = \frac{1}{2}|a| \iff -\frac{1}{2}|a| < x_n - a < \frac{1}{2}|a| \iff a - \frac{1}{2}|a| < x_n < \frac{1}{2}|a| + a.$$

Siirrytään tarkastelemaan tapauksia $a > 0$ tai $a < 0$
i) $a > 0$.
Nyt $|a| = a$, joten $a - \frac{1}{2}|a| = a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a \overset{a\geq 0}{=} \frac{1}{2}|a| > 0$. Nyt kun $n > K$, niin

$$0 < \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}|a| < x_n.$$

Siis kun $n > K$, niin $x_n > 0$, joten $|x_n| = x_n$. Siis

$$0 < \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}|a| < x_n = |x_n|,$$

joten väite pätee kun $a > 0$.
ii) $a < 0$.
Nyt $|a| = -a$, joten $a - \frac{1}{2}|a| = a - \frac{1}{2}(-a) = \frac{3}{2}a$. Nyt kun $n > K$, niin

$$x_n < \frac{1}{2}|a| + a = \frac{1}{2}(-a) + a = \frac{1}{2}a < 0.$$

Siis kun $n > K$, niin $x_n < 0$, joten $|x_n| = -x_n$. Siis

$$x_n < \frac{1}{2}a \iff |x_n| = -x_n > -\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}|a|,$$

joten väite pätee kun $a < 0$. Yhdistämällä tapaukset saadaan $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$.

O4. Induktio!?!?... Mitä tiedät siitä? Mitä haluat tietää siitä? Osoita, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Ratkaisu:
Väite pätee kun $n = 1$, sillä

$$\frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 = 1^2.$$

Olkoon sitten $n = k \geq 1$ sellainen luonnollinen luku, että

$$\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) = 1^2 + 2^2 + ... + k^2.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Siis väite pätee myös luvulla $n = k+1$. Täten induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikille luvuille $n \in \mathbb{N}$.

K4. Oletetaan, että jono (x_n) suppenee. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n)^7}{n} = 0.$$

Vihje: huomaa, että suppeneva jono on aina rajoitettu.

Ratkaisu:
Jono (x_n) suppenee, joten se on rajoitettu (kuten vihjekin antaa ymmärtää). Siis on olemassa sellainen luku $M > 0$, että $|x_n| < M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$(|x_n|)^7 < (|x_n|)^6 \cdot M < ... < (|x_n|) \cdot M^6 < M^7.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $k \geq \max(1, \frac{M^7}{\epsilon})$, $k \in \mathbb{N}$. Nyt jos $n > k$, niin

$$\left|\frac{x_n^7}{n} - 0\right| = \left|\frac{x_n^7}{n}\right| = \frac{|x_n^7|}{n} < \frac{|x_n^7|}{k} < \frac{M^7}{k} \leq \frac{M^7}{(M^7/\epsilon)} = \epsilon.$$

Siispä lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^7}{n} = 0$.

K5. Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että on olemassa reaaliluku $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 7\}$ ja että lisäksi $a^2 = 7$. (Tehtävässä osoitetaan siis, että luvun $\sqrt{7}$ olemassaolo seuraa reaalilukujen aksiomeista!)

Ratkaisu:
Merkitään $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0 \text{ ja } x^2 < 7\}$. Joukko A on epätyhjä, sillä $1 > 0$ ja $1^2 = 1 < 7$. Joukolla A on myös yläraja, esimerkiksi jos $x \in A$ ja $x \geq 3$, niin $x^2 \geq 9 > 7$, mikä on ristiriita joukon A määritelmän kanssa, joten tällaiset luvut x eivät kuulu joukkoon A. Siten A on ylhäältä rajoitettu. Siispä $x \leq 3$ kaikilla $x \in A$. Koska A on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, on olemassa $\sup A = a \geq 1$.
Nyt on kolme vaihtoehtoa: $a^2 > 7$, $a^2 < 7$, tai $a^2 = 7$. Osoitetaan että ei voi olla $a^2 < 7$ tai $a^2 > 7$, jolloin jää jäljelle $a^2 = 7$.
i) $a^2 > 7$.
Etsitään sellainen hyvin pieni luku > 0, että $7 < (a-h)^2 < a^2$. Selvästikin $x \geq 0$ kaikilla $x \in A$, joten myös $a \geq 0$ (itse asiassa $a \geq 1$). Oletetaan siis, että $h \in]0,1[$, jolloin $a - h \geq 1 - h > 0$. Saadaan

$$(a-h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 > a^2 - 2ah.$$

Edelleen

$$a^2 - 2ah > 7 \Longleftrightarrow h < \frac{a^2-7}{2a}.$$

Jos valitaan $0 < h < \min(1, \dfrac{a^2-7}{2a})$, niin tällöin todellakin kaikilla $x \in A$ pätee $x^2 < 7 < (a-h)^2$. Tällöin $a-h$ olisi joukon A yläraja. Siis $a > a-h$ ei voi olla joukon A pienin yläraja, mikä on ristiriita. Siten $a^2 > 7$ ei ole mahdollinen.
ii) $a^2 < 7$.
Etsitään jälleen niin pieni $h > 0$, että $a^2 < (a+h)^2 < 7$. Oletetaan kuten edellisessä kohdassa, että $h \in]0,1[$, jolloin $h^2 < h$. Saadaan

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 < a^2 + 2ah + h = a^2 + (2a+1)h.$$

Edelleen

$$a^2 + (2a+1)h < 7 \Longleftrightarrow h < \frac{7-a^2}{2a+1}.$$

Valitaan nyt $0 < h < \min(1, \dfrac{7-a^2}{2a+1})$, jolloin $(a+h)^2 < 7$. Näin ollen $a+h > 0$ olisi A:n alkio mutta toisaalta $a+h > a$, joten $a+h$ on suurempi kuin joukon A (pienin) yläraja, mikä on ristiriita. Siten myöskään $a^2 < 7$ ei ole mahdollinen, joten $a^2 = 7$.

K6. Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että jonon (x_n) suppenee ja sen raja-arvo on $\sqrt{7}$, jos määritellään $x_1 = 3$ ja kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{7}{x_n}).$$

Lisäkysymyksiä (ei vaadita tehtävän ruksaamiseen): (a) Osaatko selittää, miksi jono näyttää suppenevan nopeasti? (b) Osaatko antaa esimerkkiä indeksistä n jolle $|x_n - \sqrt{7}| < 10^{-100}$?

Ratkaisu:
Ensimmäisenä tavoitteena on osoittaa jono (x_n) alhaalta rajoitetuksi ja laskevaksi, jolloin se suppenee. Luku x_{n+1} on lukujen x_n ja $\dfrac{7}{x_n}$ keskiarvo. Siispä jos

kaikilla $n \in \mathbb{N}$ $x_n > \dfrac{7}{x_n}$, niin tällöin x_n on varmasti suurempi kuin x_{n+1}, mikä osoittaisi että lukujono on laskeva. Oletetaan aluksi että $x > 0$. Havaitaan, että

$$x > \sqrt{7} \iff \frac{7}{x} < \sqrt{7}.$$

Tämän voi todistaa lyhyesti, sillä

$$\begin{aligned} \text{"} \Longrightarrow \text{"}: \qquad & x > \sqrt{7} \Longrightarrow \frac{7}{x} < \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7} \\ \text{"} \Longleftarrow \text{"}: \quad & \frac{7}{x} < \sqrt{7} \Longrightarrow 7 < \sqrt{7}x \Longrightarrow x > \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Oletetaan nyt, että $x > \sqrt{7}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x + \frac{7}{x}) > \sqrt{7} \quad & \iff \quad x + \frac{7}{x} > 2\sqrt{7} \\ & \iff \quad x^2 + 7 > 2\sqrt{7}x \\ & \iff \quad x^2 - 2\sqrt{7}x + \sqrt{7}^2 > 0 \\ & \iff \quad (x - \sqrt{7})^2 > 0, \end{aligned}$$

ja viimeinen kohta on aina tosi, sillä epäyhtälön vasemmalla puolella on reaaliluvun neliö ja $x \neq \sqrt{7}$.
Osoitetaan induktiolla, että $x_n > \sqrt{7}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
Väite pätee kun $n = 1$, sillä $x_1 = 3 = \sqrt{9} > \sqrt{7}$. Olkoon sitten $n = k \geq 1$ sellainen luonnollinen luku, että $x_k > \sqrt{7}$. Edellä saatiin osoitettua tulos, jonka mukaan

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{7}{x_k}) > \sqrt{7}.$$

Siispä induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikille luvuille $n \in \mathbb{N}$. Tällöin (x_n) on alhaalta rajoitettu luvulla $\sqrt{7}$.
Aiemmin osoitettiin myös, että $\dfrac{7}{x} < \sqrt{7} < x$, kun $x > \sqrt{7}$, joten äskeisen todistuksen nojalla $\dfrac{7}{x_n} < \sqrt{7} < x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin varmasti

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{7}{x_n}) < \frac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n$$

kaikilla n, joten (x_n) on laskeva. Näin ollen lauseen 4.9. nojalla (x_n) suppenee ja on olemassa $\lim_{n\to\infty} x_n = a \geq \sqrt{7}$. Raja-arvo voidaan nyt selvittää rekursiokaavasta. Nyt on voimassa $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$, joten soveltamalla lausetta 4.7. saadaan

$$\begin{aligned} a = \frac{1}{2}(a + \frac{7}{a}) \quad & \iff \quad 2a = a + \frac{7}{a} \\ & \iff \quad a^2 = 7 \\ & \iff \quad a = \sqrt{7}, \end{aligned}$$

sillä $a \geq \sqrt{7} > 0$. Siispä $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{7}$.

Lisäkysymykset:
a) Tutkitaan kuinka paljon lähempänä jäsen x_{n+1} on raja-arvoa $\sqrt{7}$ kuin edellinen jäsen x_n. Tarkastellaan siis etäisyyksiä $\left|x_{n+1} - \sqrt{7}\right|$ ja $\left|x_n - \sqrt{7}\right|$. Aiemmin

osoitettiin että $x_n > \sqrt{7}$, joten itseisarvomerkit voidaan poistaa. Tällöin

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \sqrt{7} &= \frac{1}{2}(x_n + \frac{7}{x_n}) - \sqrt{7} \\
&= \frac{x_n^2 + 7}{2x_n} - \sqrt{7} \\
&= \frac{x_n^2 - 2\sqrt{7}x_n^2 + 7}{2x_n} \\
&= \frac{(x_n - \sqrt{7})^2}{2x_n} \\
&< \frac{(x_n - \sqrt{7})^2}{2\sqrt{7}} \\
&< \frac{(x_n - \sqrt{7})^2}{4}.
\end{aligned}$$

Siis $x_{n+1} - \sqrt{7} < \frac{(x_n - \sqrt{7})^2}{4}$. Nopeaa suppenemistahtia selittää se, että kun etäisyys $x_n - \sqrt{7} < 1$, niin korottamalla tämä etäisyys toiseen potenssiin se pienentää etäisyyttä entisestään. Lisäksi etäisyyden neliö jaetaan vielä luvulla 4, mikä myöskin selittää suppenemisen nopeudesta. Itse asiassa jo

$$0 < x_1 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} < 3 - \sqrt{4} = 1.$$

b) Käytetään hyväksi tietoa $x_{n+1} - \sqrt{7} < \frac{(x_n - \sqrt{7})^2}{4}$. Saadaan

$$\begin{aligned}
x_{n+3} - \sqrt{7} < \frac{1}{4}(x_{n+2} - \sqrt{7})^2 &< \frac{1}{4}(\frac{1}{4}((x_{n+1} - \sqrt{7})^2)^2 \\
&< \frac{1}{4}(\frac{1}{4}(\frac{1}{4}((x_{n+1} - \sqrt{7})^2)^2)^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{4^4}(x_n - \sqrt{7})^6 < \frac{1}{4^7} = \frac{1}{4^{8-1}} = \frac{1}{4^{2^3-1}}.
\end{aligned}$$

Voidaan vielä todistaa induktiolla, että $x_{n+i} - \sqrt{7} < \frac{1}{4^{2^i-1}}$, kun $i \geq 0$. Väite pätee luvulla $i = 0$, sillä

$$\frac{1}{4^{2^0-1}} = \frac{1}{4^0} = 1 > x_n - \sqrt{7}.$$

Olkoon sitten $n = i \geq 1$ sellainen luonnollinen luku, että $x_{n+i} - \sqrt{7} < \frac{1}{4^{2^i-1}}$. Tällöin

$$x_{n+(i+1)} - \sqrt{7} < \frac{1}{4}(x_{n+i} - \sqrt{7})^2 < \frac{1}{4}(\frac{1}{4^{2^i-1}})^2 = \frac{1}{4^{2\cdot 2^i-1}} = \frac{1}{4^{2^{i+1}-1}}.$$

Nyt esimerkiksi indeksillä $n = 10$:

$$x_{10} - \sqrt{7} = x_{1+9} - \sqrt{7} < \frac{1}{4^{2^9-1}} = \frac{1}{4^{511}} < \frac{1}{16^{200}} < \frac{1}{10^{200}} < 10^{-100}.$$