Tehtävä O1

Derivoi $x^{\frac{2}{5}}$
(a) tulkiten ko. funktio yhdistetyksi funktioksi ja käyttäen potenssin ja käänteisfunktion derivoimissääntöjä;
(b) soveltaen potenssin derivointisääntöä murtopotenssiin.

a) Määritellään funktiot $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x^5$. Molemmat ovat derivoituvia koko reaalilukujen joukossa ja g:llä on derivoituva käänteisfunktio $g^{-1}(x) = x^{\frac{1}{5}}$.

Nyt $x^{\frac{2}{5}}$ saadaan yhdistämällä f ja g:n käänteisfunktio g^{-1}

$$x^{\frac{2}{5}} = (x^2)^{\frac{1}{5}} = g^{-1}(f(x)) = (g^{-1} \circ f)(x)$$

Tällä yhdistetyllä funktiolla on derivaatta (Lause 7.3) joka on muotoa

$$(g^{-1} \circ f)'(x) = (g^{-1})'(f(x))f'(x)$$

Myös g:n käänteisfunktiolla on derivaatta (Lause 7.4) joka on muotoa

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

Yhdistämällä tulokset saadaan

$$D(x^{\frac{2}{5}}) = (g^{-1} \circ f)'(x) = (g^{-1})'(f(x))f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(f(x))}f'(x)$$

Havaitaan että $f'(x) = 2x$, $g'(x) = 5x^4$ ja $g^{-1}(f(x)) = x^{\frac{2}{5}}$ joten

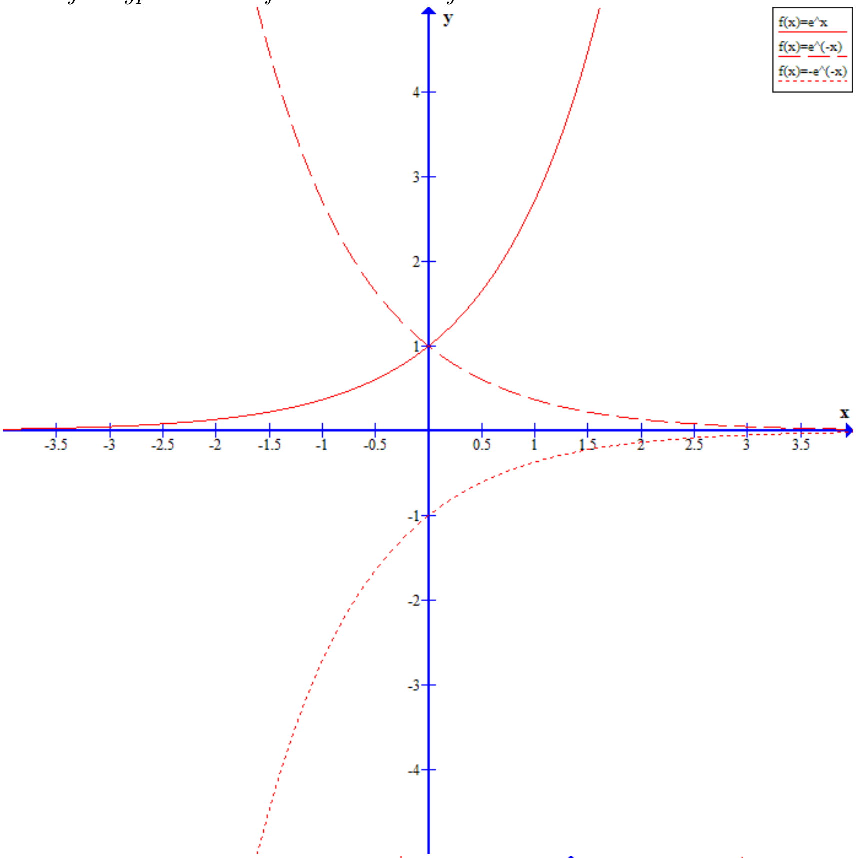
$$\frac{1}{g'(g^{-1}(f(x))}f'(x) = \frac{1}{5(x^{\frac{2}{5}})^4}2x = \frac{2x}{5x^{\frac{8}{5}}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

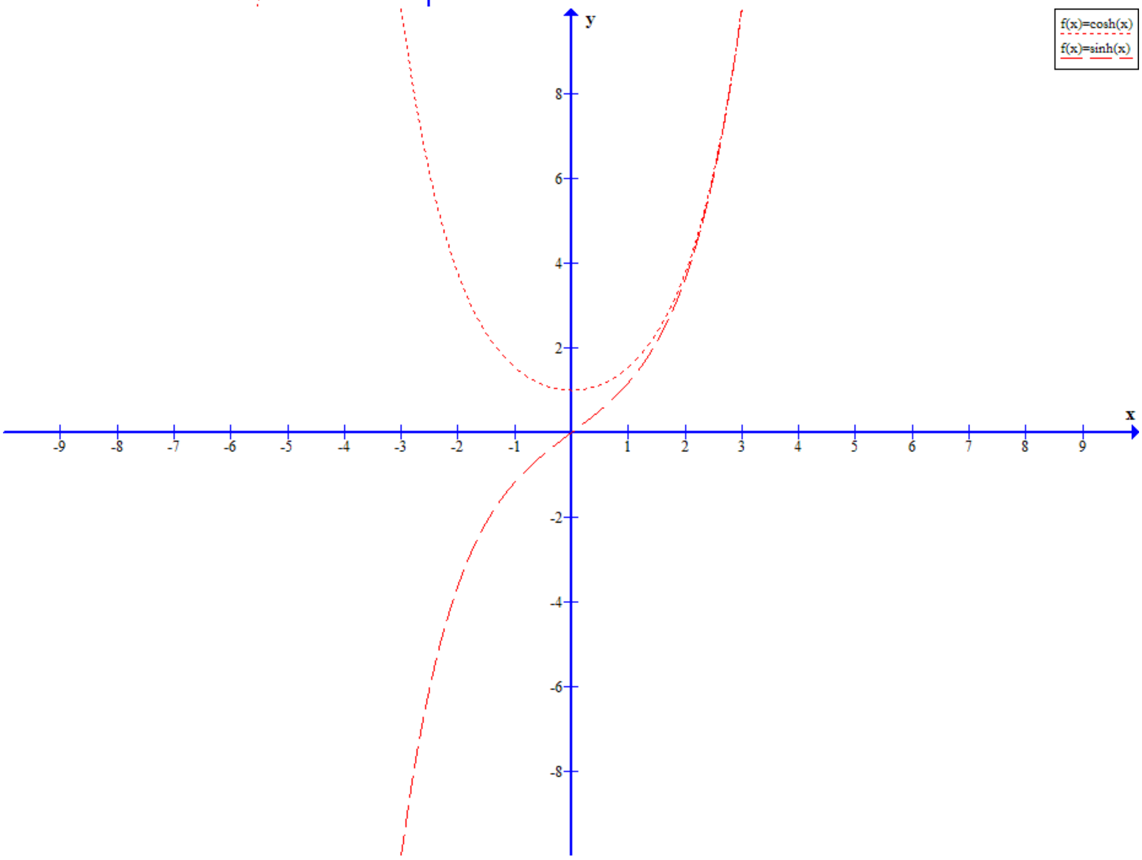
b) Lasku on hieman yksinkertaisempi:

$$D(x^{\frac{2}{5}}) = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

Tehtävä O2

Hahmottele samaan kuvaan kuvaajat lausekkeille e^x, e^{-x} ja $-e^{-x}$. Huomaa "peilaukset". Hahmottele niiden avulla kuvaajat hyperbolisille funktioille sinh ja cosh.





Tehtävä K1

K1. Osoita juuren määritelmän ja potenssin (eksponenttina kokonaisluku) laskusääntöjen avulla, että kun $x > 0$, pätee
(a)

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m;$$

(b)

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}.$$

Juuren määritelmän mukaan $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ eli $(\sqrt[n]{a})^n = a$

a) Oletetaan että $x > 0 \Rightarrow x^m > 0$. Tällöin

$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$
$$((\sqrt[n]{x})^n)^m = x^m$$
$$((\sqrt[n]{x})^m)^n = x^m$$
$$((\sqrt[n]{x})^m)^n = (\sqrt[n]{x^m})^n$$
$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

b) Oletetaan että $x > 0$:

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{(\sqrt[n]{x^m})^{np}} = \sqrt[np]{((\sqrt[n]{x^m})^n)^p} = \sqrt[np]{(x^m)^p} = \sqrt[np]{x^{mp}}$$

Tehtävä K2

Määritä

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log(\frac{1}{x})}{1 - x}.$$

Voit huomata, että kyseessä on erotusosamäärä. Voit myös käyttää l'Hospitalin säännön helpointa muotoa sivulta 62 (mikä on itse asiassa sama asia.)

Yleiselle logaritmifunktiolle pätee

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

ja logaritmifunktiolle pätee

$$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) + \ln(\frac{1}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$$

joten

$$\log(\frac{1}{x}) = \log(1) - \log(x)$$

Havaitaan että alkuperäinen raja-arvo vastaa yleisen logaritmifunktion derivaattaa pisteessä $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log(\frac{1}{x})}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{\log(x) - \log(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{1 * \ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)}$$

Tehtävä K3

K3. Johda funktion $\sinh x$ *käänteisfunktiolle logaritmilauseke ja derivointikaava. Tutki monistetta sivuilta 84 ja 85.*

Hyperbolinen sini on määritelty

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Merkitään siis

$$y = \text{arsinh}(x)$$

Määritelmän mukaan tällöin pätee

$$\begin{aligned} x &= \sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ 2x &= e^y - e^{-y} \\ 0 &= (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 \end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa käyttäen saadaan

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Koska $e^y > 0$, negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Otetaan molemmilta puolilta luonnollinen logaritmi

$$\ln(e^y) = y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Ja haluttu tulos on

$$\text{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Johdetaan seuraavaksi derivointikaava. Havaitaan että kyseinen funktio on yhdistete funktioista $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Näille löydetään tutuilla laskusäännöillä derivaatat $f'(x) = \frac{1}{x}$ ja $g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Sitten käytetään yhdistetyn funktion derivointikaavaa:

$$D(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}})$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x}{x\sqrt{x^2 + 1} + (\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x\sqrt{x^2 + 1} + (\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

joka on haluttu derivaatta.