MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Tehtävät viikolle 48
Ratkaisuehdotukset (Janne Leppä-aho)

Näissä harjoituksissa käsitellään monisteen lukuun 8 - väliarvolause jne. - liittyviä kysymyksiä. Näissä harjoituksissa saa käyttää kaikkia koulusta tuttujen funktioiden kuten trigonometristen funktioiden jne. koulusta tuttuja ominaisuuksia kuten jatkuvuutta ja derivointisääntöä.

Osa tehtävistä muistuttaa koulutehtäviä: perustele ratkaisusi tämän kurssin lauseiden avulla.

Alkuviikon tehtävät

O.1 Tarkastellaan funktiota funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, joka on määritelty yhtälöllä $f(x) = x^4$. Määritä väliarvolauseessa mainittu kohta ξ.

Ratkaisu: Funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[0, 1]$ ja derivoituva avoimella välillä $]0, 1[$, joten väliarvolauseen oletukset ovat voimassa. Lisäksi $f'(x) = 4x^3$, $f(1) = 1$ ja $f(0) = 0$. Nyt väliarvolauseen mukaan löytyy ainakin yksi $\xi \in]0, 1[$ siten, että

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0) = 1.$$

Eli

$$4\xi^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \xi^3 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Väliltä $]0, 1[$ ei löydy muita arvoja ξ, joille pätisi $f'(\xi) = 1$, sillä $f''(x) = 12x^2 > 0$, kun $x \in]0, 1[$, eli $f'(x)$ on aidosti kasvava tällä välillä.

O2. Tutki funktion $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$ mahdollisia suurimpia ja pienimpiä arvoja sekä lokaaleja ääriarvoja, kun

$$f(x) = |(x - 2)^2 - 1|$$

kaikilla $x \in [0, 7]$. Huolelliset perustelut! (Tarkista monisteen sivulta 57, miten lokaaliset ääriarvot määritellään siellä.)

Ratkaisu: Funktio f on kahden jatkuvan funktion yhdistettynä funktiona itsekin jatkuva koko määrittelyvälillä. Ratkaisemalla polynomin $(x-2)^2-1 = x^2-4x+3$ nollakohdat, voimme kirjoittaa funktion f muodossa

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{kun} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{kun} \quad 1 < x \leq 3 \\ x^2 - 4x + 3, & \text{kun} \quad 3 < x \leq 7. \end{cases}$$

Tutkitaan f:n derivaattaa määrittelyvälin eri osissa. Huomataan, että $f(x) = |(x-2)^2 - 1|$ ei ole derivoituva, kun $(x-2)^2 - 1 = 0$ eli pisteissä $x = 1$ tai $x = 3$.

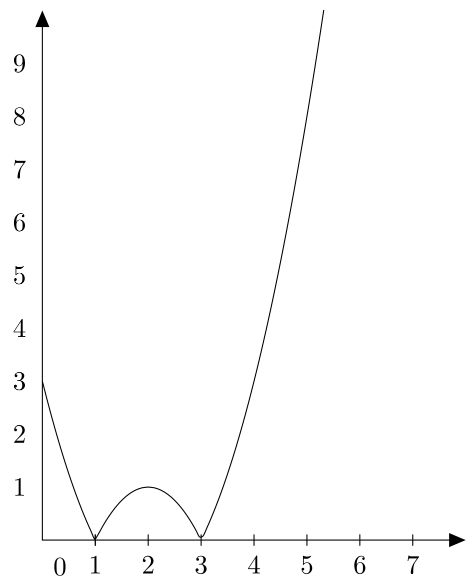
Kun $x \in]0,1[$, niin $f'(x) = 2x - 4 < 0$. Eli f aidosti vähenevä, joten sillä ei voi olla ääriarvokohtia tällä välillä.

Kun $x \in]3,7[$, niin $f'(x) = 2x - 4 > 0$. Tälläkään välillä ei voi f:n aidon kasvavuuden vuoksi olla ääriarvokohtia. Nämä päättelyt perustuvat lauseeseen 8.8, joka olennaisesti sanoo, että f':n on oltava erimerkkinen ääriarvokohdan molemmin puolin.

Kun $x \in]1,3[$, niin $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ ja $f'(x) = -2x + 4$. Huomataan, että $f'(2) = 0$. Lisäksi $f'(x) > 0$, kun $1 < x < 2$ ja $f'(x) < 0$, kun $2 < x < 3$. Lauseen 8.8 nojalla f:llä on lokaali maksimi kohdassa $x = 2$.

Tutkittavana on enää pisteet $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$ ja $x = 7$. Piste $x = 1$ on lokaali minimi, sillä $f'(x) < 0$, kun $0 < x < 1$ ja $f'(x) > 0$, kun $1 < x < 2$. Myös piste $x = 3$ on lokaali minimi, sillä $f'(x) < 0$, kun $2 < x < 3$ ja $f'(x) > 0$, kun $3 < x < 7$. Monisteen sivulta 57 löytyvän määritelmän nojalla pisteet 0 ja 7 eivät voi olla **lokaaleja** ääriarvokohtia, sillä f:ää ei ole määritelty missään näiden pisteiden ympäristöissä.

Tutkitaan vielä f:n suurinta ja pienintä arvoa. Korollaarin 8.12. nojalla riittää laskea f:n arvot pisteissä 0,1,2,3 ja 7. Huomataan, että f saa suurimman arvonsa 24 pisteessä $x = 7$ ja pienimmän arvonsa 0 pisteissä $x = 1$ ja $x = 3$. Loppuun vielä kuva funktiosta f.



K1. Oletetaan, että funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $f(0) = 3$ ja että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $-1 < f'(x) < 2$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(1)$?

Ratkaisu: Funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[0,1]$ ja derivoituva avoimella välillä $]0,1[$, joten väliarvolauseen oletukset ovat voimassa. Nyt tiedetään, että löytyy ainakin yksi $\xi \in]0,1[$, jolle

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - 3,$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$f(1) = f'(\xi) + 3).$$

Koska $-1 < f'(x) < 2$ tutkittavalla välillä, niin $f(1) < 3 + 2 = 5$ ja $f(1) > -1 + 3 = 2$. Eli nämä yhdistämällä saadaan

$$2 < f(1) < 5.$$

K2. Oletetaan, että funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $f(1) = 3$ ja että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $-1 < f'(x) < 2$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(0)$?

Ratkaisu: Funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[0,1]$ ja derivoituva avoimella välillä $]0,1[$, joten väliarvolauseen oletukset ovat voimassa. Nyt tiedetään, että löytyy ainakin yksi $\xi \in]0,1[$, jolle

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 3 - f(0),$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$f(0) = 3 - f'(\xi).$$

Koska $-1 < f'(x) < 2$ tutkittavalla välillä, niin $f(0) < 3 - (-1) = 4$ ja $f(0) > 3 - 2 = 1$. Eli nämä yhdistämällä saadaan

$$1 < f(0) < 4.$$

K3. Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[0,1]$ ja että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee
(a) $f'(x) \leq 1$;
(b) $f'(x) \leq x^7$.
Mitä tapauksissa (a) ja (b) tiedetään arvosta $f(1)$, jos $f(0) = 2$? (b)-kohdassa kannattaa tutkia lausekkeella $\frac{1}{8}x^8 - f(x)$ määriteltyä "apufunktiota".

Ratkaisu: (a) Väliarvolauseen oletukset ovat voimassa, joten löytyy ainakin yksi $\xi \in]0,1[$, jolle

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - 2,$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$f(1) = f'(\xi) + 2.$$

Koska $f'(x) \leq 1$ tutkittavalla välillä, niin

$$f(1) \leq 1 + 2 = 3.$$

(b) Määritellään vihjeen mukaisesti apufunktio $g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (1/8)x^8 - f(x)$. Funktio g on jatkuva suljetulla välillä $[0,1]$ ja derivoituva avoimella välillä $]0,1[$.

Huomataan, että $g(1) = (1/8) \cdot 1^8 - f(1) = 1/8 - f(1)$ ja $g(0) = 0 - f(0) = -2$. Lisäksi derivoimalla g, saadaan $g'(x) = x^7 - f'(x)$. Koska oletuksen mukaan kaikilla $x \in]0, 1[$ pätee $f'(x) \leq x^7$, niin $g'(x) = x^7 - f'(x) \geq x^7 - x^7 = 0$. Siis $g'(x) \geq 0$, kun $0 < x < 1$.

Sovelletaan nyt väliarvolausetta funktioon g. Oletusten on todettu olevan voimassa, joten löytyy ainakin yksi $\xi \in]0, 1[$, jolle

$$g'(\xi) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g(1) - g(0) = 1/8 - f(1) - (-2) = \frac{17}{8} - f(1).$$

Eli

$$f(1) = \frac{17}{8} - g'(\xi) \leq \frac{17}{8},$$

koska $g'(x) \geq 0$, kun $0 < x < 1$.