MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ratkaisuehdotuksia,
alkuviikko 47
(Esko Heinonen)

Näissä harjoituksissa käsitellään funktion derivoituvuuteen liittyviä kysymyksiä. Keskeisenä teemana on ”karakterisaatiolause”(differentioituvuus), joka tarjoaa uuden näkökulman derivoituvuuteen. Näissä harjoituksissa saa käyttää kaikkia koulusta tuttujen funktioiden kuten trigonometristen funktioiden jne. koulusta tuttuja ominaisuuksia kuten jatkuvuutta ja derivointisääntöä.

Nyt on tärkeää palauttaa mieleen lukion pitkän matematiikan derivointisäännöt.

O.1 Määritellään $f(x) = x^2$. Osoita, että

$$f(1 + h) = f(1) + 2h + h^2.$$

Voiko tästä päätellä suoraan funktion f derivaatan kohdassa $x = 1$?

Ratkaisu: Lähdetään ratkaisemaan tehtävää kirjoittamalla funktion f arvo pisteessä $x = 1 + h$. Tällöin saamme

$$f(1 + h) = (1 + h)^2 = 1^2 + 1 \cdot h + h \cdot 1 + h^2 = 1 + 2h + h^2 = f(1) + 2h + h^2,$$

Sillä $f(1) = 1$. Siis funktion f arvo pisteessä $h+1$ voidaan kirjoittaa haluttuun muotoon.

Se, että f voitiin kirjoittaa ylläolevassa muodossa kertoo itseasiassa sekä f:n derivoituvuuden että derivaatan arvon pisteessä $x = 1$, sillä karakterisaatiolauseen(**Luentomoniste lause 7.1**) nojalla f on derivoituva pisteessä x_0 jos ja vain jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varepsilon(h)h,$$

missä $\varepsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Tehtävän funktiolla $x_0 = 1$, lauseke $\varepsilon(h) = h$ ja $f'(1) = 2$.

O2. Määritellään $f(x) = x^2$. Esitä funktion muutos muodossa

$$f(1+h) = f(1) + 7h + h\alpha(h) = 1 + 7h + h\alpha(h).$$

Onko tulos ristiriidassa karakterisaatiolauseen kanssa?

Ratkaisu: Kirjoitetaan funktion muutos halutussa muodossa ja lähdetään ratkaisemaan lauseketta $\alpha(h)$. Kun $h \neq 0$ saadaan

$$\begin{aligned} f(1+h) &= f(1) + 7h + h\alpha(h) \\ &\Leftrightarrow (1+h)^2 = 1 + 7h + \alpha(h) \\ &\Leftrightarrow \alpha(h) = \frac{(1+h)^2 - 1 - 7h}{h} \\ &\quad = \frac{h^2 - 5h}{h} = h - 5. \end{aligned}$$

Nyt huomataan, että $\alpha(h) = h - 5 \to -5$, kun $h \to 0$. Karakterisaatiolauseen nojalla derivoituva funktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \varepsilon(h)h,$$

missä $\varepsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Siis lauseke $\alpha(h)$ ei kelpaa lausekkeeksi $\varepsilon(h)$. Huomataan kuitenkin, että ylläoleva voidaan kirjoittaa hieman eri tavalla:

$$\begin{aligned} f(1+h) &= f(1) + 7h + h\alpha(h) \\ &= 1 + 7h + h\alpha(h) \\ &= 1 + 2h + 5h + h\alpha(h) \\ &= 1 + 2h + h(5 + \alpha(h)). \end{aligned}$$

Tällöin pätee $5+\alpha(h) \to 5-5 = 0$, kun $h \to 0$, joten voimme valita $\varepsilon(h) = 5+\alpha(h)$ ja näin ollen tehtävän tulos ei ole ristiriidassa karakterisaatiolauseen kanssa.

K1. Derivoi
(a) $\cos^3 x^4$;
(b) $\sin^2(\cos^3 x^4)$;
(c) $\sqrt{\sin^2(\cos^3 x^4) + 1}$.
Tehtävässä kannattaa muistaa yhdistetyn funktion derivointisääntö!

Ratkaisu: Tässä tehtävässä sovelletaan jo lukiostakin tuttua derivoinnin ketjusääntöä. Täytyy kuitenkin olla tarkkana, sillä nyt "sisäkkäisiä"funktioita on useampia ja huolimattomuusvirheitä tulee helposti. Derivointi (b)- ja (c)-kohdissa helpottuu, kun huomaa, että sisäfunktiona esiintyy aiemman kohdan funktio, joka on jo derivoitu.

(a)

$$\begin{aligned} D(\cos^3 x^4) &= D(\cos x^4)^3 = 3(\cos x^4)^2(D\cos x^4) \\ &= 3(\cos x^4)^2(-\sin x^4)(Dx^4) = 3(\cos x^4)^2(-\sin x^4)(4x^3) \\ &= -12x^3(\cos^2 x^4)(\sin x^4). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} D(\sin^2(\cos^3 x^4)) &= D(\sin(\cos x^4)^3)^2 = 2(\sin(\cos x^4)^3)D((\sin(\cos x^4)^3)) \\ &= 2(\sin(\cos x^4)^3)(\cos(\cos x^4)^3)\underbrace{D((\cos x^4)^3)}_{\text{(a)-kohta}} \\ &= (\sin(\cos x^4)^3)(\cos(\cos x^4)^3)(-12x^3(\cos^2 x^4)(\sin x^4)) \\ &= -24x^3\cos(\cos^3 x^4)\cos^2 x^4 \sin(\cos^3 x^4)\sin x^4 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} D(\sqrt{\sin^2(\cos^3 x^4)+1}) &= D(\sin^2(\cos^3 x^4)+1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(\sin^2(\cos^3 x^4)+1)^{-\frac{1}{2}}\underbrace{D(\sin^2(\cos^3 x^4))}_{\text{(b)-kohta}} \\ &= -12\frac{x^3\cos(\cos^3 x^4)\cos^2 x^4\sin(\cos^3 x^4)\sin x^4}{\sqrt{\sin^2(\cos^3 x^4)+1}} \end{aligned}$$

K2. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä $f(x) = x|x|$. Millä x on olemassa derivaatta $f'(x)$? Entä toinen derivaatta $f''(x)$? Entä kolmas derivaatta $f'''(x)$?

Ratkaisu: Ensimmäisen derivaatan kohdalla tutkittavia tapauksia on kolme.

Kun $x < 0$, niin $f(x) = x|x| = x(-x) = -x^2$. Tällöin $f'(x) = -2x = 2|x|$.
Kun $x > 0$, niin $f(x) = x|x| = xx = x^2$. Tällöin $f'(x) = 2x = 2|x|$.

Kun $x = 0$, niin joudumme tutkimaan erotusosamäärän raja-arvoa. Saadaan

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x|x| - 0|0|}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x|.$$

Siis

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

ja näin ollen $f'(0) = 0 = 2|0|$. Joten $f'(x) = 2|x|$.

Seuraavaksi tutkitaan toista derivaattaa. Jälleen meillä on tutkittavana 3 eri tapausta.

Kun $x < 0$, niin $f'(x) = -2x$, joten $f''(x) = -2$.

Kun $x > 0$, niin $f'(x) = 2x$, joten $f''(x) = 2$.

Kun $x = 0$, niin tutkitaan jälleen erotusosamäärän raja-arvoa. Piirtämällä tilanteesta kuvan, voisi huomata, että kohdassa $x = 0$ on ensimmäisellä derivaatalla "piikki", joten derivaattaa ei luultavasti ole tässä pisteessä olemassa. Osoitetaan tämä kuitenkin vielä erotusosamäärällä:

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{2|x| - 2|0|}{x} = \frac{2|x|}{x}.$$

Nyt lähestyttäessä pistettä 0 vasemmalta on $|x| = -x$, jolloin erotusosamäärän raja-arvona on -2. Jos taas pistettä 0 lähestytyään oikealta, niin $|x| = x$, jolloin erotusosamäärän raja-arvona on 2. Siis

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x}{x} = -2 \neq 2 = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2|x|}{x}$$

Kolmannen derivaatan olemassaoloa voimme tutkia vain tapauksissa $x \neq 0$, sillä toinen derivaatta on olemassa ainoastaan tällöin.

Kun $x < 0$, niin $f''(x) = -2$, joten $f'''(x) = 0$.

Kun $x > 0$, niin $f''(x) = 2$, joten $f'''(x) = 0$.

K3. Oletetaan, että $f'(1) = 4$. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1 - 2h)}{h}.$$

Vihje: täydennä tutkittava lauseke muotoon, missä esiintyvät erotusosamäärän muodot

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} \quad \text{ja} \quad \frac{f(1 - 2h) - f(1)}{-2h}.$$

Ratkaisu: Noudatetaan vihjettä ja lähdetään muokkaamaan annettua lauseketta

$$
\begin{aligned}
\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h} &= \frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h} \\
&= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} + \frac{f(1)-f(1-2h)}{h} \\
&= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} - \frac{f(1-2h)-f(1)}{h} \\
&= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} - 2\frac{f(1-2h)-f(1)}{2h} \\
&= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} + 2\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}.
\end{aligned}
$$

Oletuksen nojalla $f'(1) = 4$, joten pätee

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 4$$

ja

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h} = 4.$$

Nyt koska ylläolevat raja-arvot ovat olemassa, niin voimme soveltaa lausetta 5.4 ja saamme

$$\lim_{h\to 0} 2\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h} = 2\cdot 4 = 8$$

ja edelleen

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h} + 2\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} + \lim_{h\to 0} 2\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h} \\
&= 4 + 8 = 12.
\end{aligned}
$$