Matematiikan ja Tilastotieteen laitos
Analyysi I, tehtävät alkuviikolle 46
Ratkaisuehdotuksia, Annemari Kiviniemi

01. Määritellään funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x^5 + x^3 + 1$. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa $x \in [0,1]$, jolle pätee $f(x) = 2$.

Ratkaisu: Tarkasteltava funktio f on polynomifunktiona jatkuva kaikkialla ja erityisesti f on jatkuva ja määritelty välillä $[0,1]$.
Tarkastellaan funktion arvoja välin $[0,1]$ päätepisteissä:

$f(0) = 0^5 + 0^3 + 1 = 1$

$f(1) = 1^5 + 1^3 + 1 = 3$

Nyt Bolzanon lauseen nojalla f saa kaikki arvot lukujen 1 ja 3 väliltä eli on olemassa $x \in]0,1[$, jolle pätee $f(x) = 2$.

02. Määritellään funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x^5 + x^3 + 1$. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa x, jolle pätee $f(x) = 2012$.

Ratkaisu: Funktio on sama kuin tehtävässä 01., se on siis edelleen jatkuva ja määritelty kaikkialla.
Nyt huomataan, että

$f(4) = 4^5 + 4^3 + 1 = 1089$

$f(5) = 5^5 + 5^3 + 1 = 3251$.

Funktio f on jatkuva ja määritelty nyt erityisesti välillä $[4,5]$, joten Bolzanon lauseen nojalla on olemassa sellainen $x \in]4,5[$, että $f(x) = 2012$.

(K1) Osoita, että

$$f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+1}$$

on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

Ratkaisu: Tiedetään, että f on jatkuva pisteessä x_0 jos ja vain jos $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Lähdetään siis tutkimaan funktion f raja-arvoa lauseen 5.4 avulla, kun $x \to x_0$.

Tutkitaan ensin osoittajan raja-arvoa. Kun $x \to x_0$, niin

$x^2 = x \cdot x \to x_0 \cdot x_0 = x_0^2$

$2x \to 2 \cdot x_0 = 2x_0$

$3 \to 3$

$x^2+2x+3 \to x_0^2 + 2x_0 + 3.$

Tutkitaan sitten nimittäjän raja-arvoa. Kun $x \to x_0$, niin

$x^2+1 \to x_0^2+1$

Huomataan, että nimittäjän raja-arvo $x_0^2+1 \neq 0$ kaikilla x. Siispä voidaan tarkastella osamäärän raja-arvoa. Ylläolevien raja-arvojen ja lauseen 5.4. nojalla, kun $x \to x_0$, niin

$$f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+1} \to \frac{x_0^2+2x_0+3}{x_0^2+1} = f(x_0).$$

Ollaan siis saatu $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Täten funktio on jatkuva kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}$. Näin ollen f on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

(K2.) Osoita määritelmän perusteella, että

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \to \infty$$

kun $x \to \infty$ ja

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \to -\infty$$

kun $x \to -\infty$.

Ratkaisu. Huomataan aluksi, että

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = x^4(x-1) + x^2(x-1) + (x-1) = (x^4 + x^2 + 1)(x-1)$$

Ensimmäisessä kohdassa on osoitettava, että kaikilla $M > 0$ on olemassa sellainen $K > 0$, että kun $x > K$, niin

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 > M.$$

Nyt $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (x^4 + x^2 + 1)(x-1) \overset{x>1}{>} x - 1$

Halutaan siis $x - 1 > M \Leftrightarrow x > M + 1$. Valitaan siis kynnykseksi $K = M + 1$

Muotoillaan varsinainen todistus.

Olkoon $M > 0$ ja $x > M + 1$. Nyt

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 > x - 1 > (M+1) - 1 = M.$$

On osoitettu, että $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 \to \infty$ kun $x \to \infty$.

Toisessa kohdassa on osoitettava, että kaikilla $m < 0$ on olemassa sellainen $k < 0$, että kun $x < k$, niin

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 > M.$$

Nyt $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (x^4 + x^2 + 1)(x-1) \overset{x<0}{<} x - 1$

Halutaan siis $x - 1 < m \Leftrightarrow x < m + 1$. Valitaan siis kynnykseksi $k = m + 1$.

Muotoillaan varsinainen todistus.

Olkoon $m < 0$ ja $x < \min\{0, m+1\}$. Nyt

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 < x - 1 < (m+1) - 1 = m.$$

On osoitettu, että $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \to -\infty$ kun $x \to -\infty$.

(K3) Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa x, jolle

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 2012.$$

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$.

Funktio f on polynomifunktiona jatkuva kaikkialla.

Nyt huomataan, että

$f(5) = 5^5 - 5^4 + 5^3 - 5^2 + 5 - 1 = 2604$

$f(4) = 4^5 - 4^4 + 4^3 - 4^2 + 4 - 1 = 819$

Nyt erityisesti f on jatkuva ja määritelty välillä $[4,5]$. Siis Bolzanon lauseen nojalla f saa välillä $]4,5[$ kaikki arvot lukujen 819 ja 2604 välillä, myös arvon 2012. Siis on olemassa sellainen $x \in]4,5[$, että $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 2012$.