MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Tehtävät viikolle 45
Ratkaisuehdotuksia alkuviikon tehtäviin (Vesa Piilola)

O.1 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

ja

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Ratkaisu.
Ensimmäisessä tapauksessa halutaan näyttää, että on olemassa $\delta > 0$ siten että $\frac{1}{x-1} > M$, kun $x \in]1, 1+\delta[$, erityisesti pätee $0 < x-1 < \delta$.

Olkoon $M > 0$ ja oletetaan että $x \in]1, 1+\delta[$ valitaan $\delta < (1/M)$. Tällöin

$$\frac{1}{x-1} > \frac{1}{\delta} > \frac{1}{\frac{1}{M}} = M.$$

Näin ollen

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

Jälkimmäisessä tapauksessa haluamme näyttää, että on jälleen olemassa $\delta > 0$ mutta nyt siten että $\frac{1}{x-1} < m$, missä $m < 0$, kun $x \in]1-\delta, 1[$ eli tällöin $x - 1 < 0$.

Tehtävä menee samoin kuin edellinenkin mutta nyt tulee vain huomioida, että valitaan positiivinen δ ja huolehditaan että arviot menevät oikeaan suuntaan nyt kun arvioimme negatiivista lauseketta.

Olkoon $m < 0$ ja oletetaan että $x \in]1-\delta, 1[$ valitaan $\delta < -\frac{1}{m}$, tällöin $-\delta < x-1 < 0$. Nyt

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{-\delta} < \frac{1}{-(-\frac{1}{m})} = m.$$

Näin ollen

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

O2. Selvitä lauseen 5.4 avulla

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Ratkaisu.
Kootaan vastaus soveltamalla lausetta 5.4. Tiedämme että vakiofunktion $f(x) = a$, missä $a \in \mathbb{R}$ raja-arvo pisteessä 2 on vakio a. Lisäksi funktion $f(x) = x$ raja-arvo pisteessä 2 on 2. Nyt lauseen 5.4. perusteella, kun $x \to 2$ saamme:

$2x \to 2 * 2 = 4,$
$x^2 = x * x \to 2 * 2 = 4,$

Nyt saamme osoittajan raja-arvoksi $2x + 1 \to 4 + 1 = 5$ ja vastaavasti nimittäjän raja-arvoksi $x^2 + 1 \to 4 + 1 = 5 \neq 0.$

Näin ollen

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{5}{5} = 1$$

.

K1. Selvitä lauseen 5.4 avulla

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^3+x^2+x}{x^2+7}.$$

Ratkaisu.
Kootaan vastaus soveltamalla lausetta 5.4. Tiedämme että vakiofunktion $f(x) = a$, missä $a \in \mathbb{R}$ raja-arvo pisteessä 2 on vakio a. Lisäksi funktion $f(x) = x$ raja-arvo pisteessä 2 on 2. Nyt lauseen 5.4. perusteella, kun $x \to 2$ saamme:

$x^2 = x * x \to 2 * 2 = 4,$
$x^3 = x^2 * x \to 4 * 2 = 8,$
$2x^3 \to 2 * 8 = 16$ ja
$x^2 + x \to 4 + 2 = 6.$

Nyt saamme osoittajan raja-arvoksi $2x^3 + (x^2 + x) \to 16 + 6 = 22$ ja vastaavasti nimittäjän raja-arvoksi $x^2 + 7 \to 4 + 7 = 11$, kun $x \to 2$.

Siispä

$\frac{2x^3+x^2+x}{x^2+7} \to \frac{22}{11} = 2,$ kun $x \to 2$.

K2. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{7x+1} = \frac{1}{7}.$$

Pohdintaa:

Halutaan näyttää, että $|\frac{x-1}{7x+1} - \frac{1}{7}| < \varepsilon$ kun $x > M_\varepsilon$. Tutkitaan erotuksen itseisarvoa.

$$\begin{aligned}\left|\frac{x-1}{7x+1} - \frac{1}{7}\right| = \left|\frac{7(x-1) - 7x - 1}{7(7x+1)}\right| &= \left|\frac{7x-7-7x-1}{7(7x+1)}\right| \\ &= \frac{|-8|}{7|7x+1|} \\ &\overset{x\geq 0}{=} \frac{8}{7(7x+1)} \leq \frac{8}{7x}\end{aligned}$$

(2)

Nyt huomataan, että $\frac{8}{7x} < \varepsilon$ aina kun $x > \frac{8}{7\varepsilon}$. Nyt olemme valmiit kirjoittamaan varsinaisen todistuksen.

Ratkaisu.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $x > M_\varepsilon$, valitaan $M_\varepsilon \geq \max\{0, \frac{8}{7\varepsilon}\}$. Nyt

$$\left|\frac{x-1}{7x+1} - \frac{1}{7}\right| = \frac{8}{7(7x+1)} \leq \frac{8}{7x} < \frac{8}{7\frac{8}{7\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Siten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{7x+1} = \frac{1}{7}.$$

K3. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 3+} \frac{5}{x-3} = \infty.$$

Pohdintaa:

Huomataan, että kyseessä on oikeanpuoleinen raja-arvo. Määritelmän mukaan väite pätee, jos jokaista $M > 0$ kohti voidaan löytää sellainen $\delta > 0$, että aina kun $3 < x < 3 + \delta$ pätee, että $f(x) > M$. Huomataan, että määritelmän ehdoista seuraa, että erotus $(x - 3) > 0$. Tutkitaan nyt lauseketta:

$$\frac{5}{x-3} \geq \frac{1}{x-3}$$

Nyt huomataan, että $1/(x - 3) > M$ kun $1 > M(x - 3)$ ja edelleen kun $(x - 3) < 1/M$.

Voimme nyt muotoilla varsinaisen todistuksen.

Ratkaisu.
Olkoon $M > 0$ ja $\delta < 1/M$. Nyt kun $3 < x < 3 + (1/M)$ pätee, että

$$\frac{5}{x-3} \geq \frac{1}{x-3} > \frac{1}{\delta} > \frac{1}{\frac{1}{M}} = M.$$

Näin ollen

$$\lim_{x \to 3+} \frac{5}{x-3} = \infty.$$