O1:

Ositettava funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$$

Tutkitaan funktion arvojen etäisyyttä raja-arvoehdokkaasta:

$$\left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{3(x+1)}{3(2x+1)} - \frac{2(2x+1)}{3(2x+1)} \right|$$

$$= \left| \frac{3x+3-4x-2}{6x+3} \right|$$

$$= \left| \frac{-x+1}{6x+3} \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)\cdot(x-1)}{6x+3} \right| = \left| \frac{x-1}{6x+3} \right|$$

Voidaan olettaa, että $|x-1| < \delta < 1$, sillä olemme kiinnostuneita vain pienistä etäisyyksistä. Itseisarvolemman mukaan pätee tällöin

$$|x-1| < 1 \iff -1 < x-1 < 1$$
$$\iff 0 < x < 2$$

Olk. $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$. Arvioidaan nyt alkuperäistä lauseketta:

$$\left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{x-1}{6x+3} \right|$$

$$= \frac{1}{6x+3} \cdot |x-1|$$

$$< |x-1| < \delta = \min\{1, \varepsilon\} \le \varepsilon$$

Siis $\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$ □

O2: Osoitettava, funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että väite $\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2x+1} = 1$ on epätosi.

On siis löydettävä sellainen $\varepsilon > 0$, että millään $\delta > 0$ ei ehdoista $|x-1| < \delta$, $x \neq 1$ seuraa, että

$$\left| \frac{x+1}{2x+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Olkoon $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$, lähdetään arvioimaan funktion arvojen etäisyyttä raja-arvoehdokkaasta:

$$\left| \frac{x+1}{2x+1} - 1 \right| = \left| \frac{x+1-2x-1}{2x+1} \right|$$

$$= \left| \frac{-x}{2x+1} \right|$$

$$= \frac{x}{2x+1} > \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{3}{2} + 1} = \frac{1}{8} \quad (1)$$

Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{8}$, nyt kaikille $\delta > 0$ löytyy $x \in \mathbb{R}$ siten, että

$$|x-1| < \min\{\tfrac{1}{2}, \delta\}$$

Näille x pätee myös $|x-1| < \delta$ ja $|x-1| < \frac{1}{2}$ eli itseisarvolemman mukaan $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ ja siten edelleen (1):n nojalla

$$\left| \frac{x+1}{2x+1} - 1 \right| > \frac{1}{8} = \varepsilon$$

Siis $\varepsilon = \frac{1}{8}$:lle ei löydy δ:aa, jolla pätisi

$\left| \frac{x+1}{2x+1} - 1 \right| < \varepsilon = \frac{1}{8}$, kun $|x-1| < \delta$, joten 1 ei ole raja-arvo. $\square$

K1: Osoitettava funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}$$

Tutkitaan funktion arvojen etäisyyttä raja-arvoehdokkaasta

$$\left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{4}{7} \right| = \left| \frac{7(x+1)}{7(2x+1)} - \frac{4(2x+1)}{7(2x+1)} \right|$$

$$= \left| \frac{7x+7-8x-4}{14x+7} \right|$$

$$= \left| \frac{-x+3}{14x+7} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{14x+7} \right| \cdot |x-3|$$

Voidaan olettaa, että $|x-3| < 1$, jolloin itseisarvolemman mukaan pätee $-1 < x-3 < 1$ ja edelleen $2 < x < 4$

Olkoon $\varepsilon > 0$, valitaan $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$. Arvioidaan nyt alkuperäistä lauseketta:

$$\left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{4}{7} \right| = \left| \frac{1}{14x+7} \right| \cdot |x-3|$$

$$= \frac{1}{14x+7} \cdot |x-3|$$

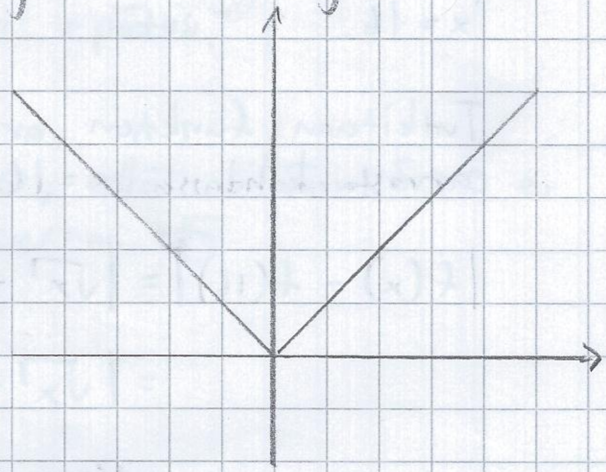
$$< |x-3| < \delta = \min\{1, \varepsilon\} \leq \varepsilon$$

Siis $\left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{4}{7} \right| < \varepsilon$, kun $|x-3| < \delta = \min\{1, \varepsilon\}$,

joten $\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}$ $\square$

K2: Tutkittava, onko funktio $f(x) = |x|$ derivoituva kohdassa $x = 0$ derivaatan ja funktion raja-arvon määritelmien perusteella.

$\boxed{\text{TAPA 1}}$



Kuvan mukaan näyttäisi siltä, että f ei olisi derivoituva, sillä kohdassa $x = 0$ on epäilyttävä kulma. Osoitetaan siis, että ei ole olemassa raja-arvoa

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Pikaisella tarkastelulla huomataan, että jos $x > 0$, niin

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

Samoin, jos $x < 0$, pätee

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0-} -1 = -1$$

Toispuoleisten raja-arvojen erilaisuuden perusteella kyseistä raja-arvoa ei siis voi olla olemassa, osoitetaan tämä vielä tarkasti funktion raja-arvon määritelmän perusteella: lähdetään tutkimaan funktion arvojen etäisyyttä arvatusta raja-arvosta $a \in \mathbb{R}$. Itseisarvolemman "vasemman puolen" mukaan

$$\left| \frac{|x|}{x} - a \right| \geq \left| \left| \underbrace{\frac{|x|}{x}}_{1 \text{ tai } -1} \right| - |a| \right| = \big| |a| - 1 \big| \geq 0$$

Nyt, jos $a \neq -1$ ja $a \neq 1$ voidaan valita $\varepsilon < \big||a| - 1\big|$, jolloin ei löydy $\delta > 0$, jolle pätisi, että

$\left| \frac{|x|}{x} - a \right| < \varepsilon$, kun $|x - 0| = |x| < \delta$

Jos $a=1$, huomataan, että jos $x<0$, niin

$$\left|\frac{|x|}{x}-1\right| = \left|\frac{-x}{x}-1\right| = |-2| = 2$$

Nyt voidaan valita $\varepsilon < 2$, jolloin ei löydy $\delta > 0$ siten, että

$\left|\frac{|x|}{x}-1\right| < \varepsilon$, kun $|x| < \delta$

Samaten, jos $a=-1$, huomataan, että jos $x>0$, niin

$$\left|\frac{|x|}{x}+1\right| = \left|\frac{x}{x}+1\right| = |1+1| = |2| = 2$$

Taas voidaan valita $\varepsilon < 2$, jolloin ei löydy $\delta > 0$ siten, että

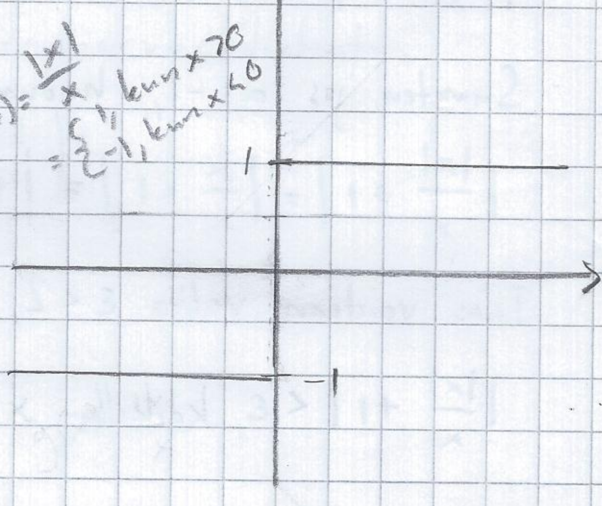
$\left|\frac{|x|}{x}+1\right| < \varepsilon$, kun $|x| < \delta$ $\square$

K2: Tutkittava, onko funktio $f(x) = |x|$ derivoituva kohdassa $x = 0$ derivaatan ja funktion raja-arvon määritelmien avulla.

TAPA 2

Tarkoitus olisi siis tutkia, onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$



Kuvan perusteella raja-arvoa ei ole olemassa, sillä funktio $g(x) = \frac{|x|}{x}$ saa arvon 1, kun $x > 0$ ja -1, kun $x < 0$. Osoitetaan tämä vielä tarkasti raja-arvon määritelmän avulla:

Jos olisi olemassa jokin $a \in \mathbb{R}$ siten, että $g(x) \to a$, kun $x \to 0$, niin tällöin kaikilla $x \neq 0$ ja kaikilla $\varepsilon > 0$ olisi olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|g(x) - a| < \varepsilon, \text{ kun } |x - 0| = |x| < \delta$$

Olkoon nyt $x > 0$ ja $x_0 < 0$ ja lisäksi $|x - 0| < \delta$ sekä $|x_0 - 0| < \delta$. Nyt kolmioepäyhtälön ja funktion raja-arvon määritelmän mukaan

$$|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - a + a - g(x_0)|$$
$$\leq |g(x) - a| + |g(x_0) - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Kuitenkin tiedämme myös, että

$$|g(x) - g(x_0)| = |1 - (-1)| = |2| = 2$$

Valitsemalla nyt $\varepsilon < 1$, syntyy ristiriita:

$$2 = |g(x) - g(x_0)| < 2 \cdot \varepsilon < 2 \cdot 1 = 2$$

Siis funktio $f(x) = |x|$ ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$ $\square$

K3: Osoitettava funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien perusteella, että funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on jatkuva kohdassa $x = 16$.

Tutkitaan funktion arvojen etäisyyttä funktion arvosta kohdassa $x = 16$

$$|f(x) - f(16)| = |\sqrt{x} - \sqrt{16}|$$
$$= |\sqrt{x} - 4|$$
$$= \left|\frac{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)}{\sqrt{x} + 4}\right|$$
$$= \left|\frac{x - 16}{\sqrt{x} + 4}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{\sqrt{x} + 4}\right| \cdot |x - 16|$$

Voidaan olettaa, että $|x - 16| < 1$, jolloin itseisarvolemman perusteella $-1 < x - 16 < 1$ ja edelleen $15 < x < 17$.

Olkoon $\varepsilon > 0$, valitaan $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$. Arvioidaan nyt alkuperäistä lauseketta

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x} + 4}\right| \cdot |x - 16| = \frac{1}{\sqrt{x} + 4} \cdot |x - 16|$$

$$< |x - 16| < \delta = \min\{1, \varepsilon\} \leq \varepsilon$$

Siis $|f(x) - f(16)| = |\sqrt{x} - \sqrt{16}| < \varepsilon$, kun $|x - 16| < \delta = \min\{1, \varepsilon\}$, joten funktion jatkuvuuden määritelmän perusteella f on jatkuva kohdassa $x = 16$ $\square$