MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Ratkaisuehdotuksia viikon 41 tehtäville
Jarno Lintusaari

O1. Osoita, että $7^n \geq 1 + 6n$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ratkaisu.
Bernoullin epäyhtälön mukaan kun $x \in \mathbb{R}$ ja $x \geq -1$, niin seuraa että $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Bernoullin epäyhtälöä käyttämällä saamme suoraan, että

$$7^n = (1 + 6)^n \geq 1 + 6n$$

kun $n = 1, 2, 3, \ldots$.

O2. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{7^n} = 0.$$

Ratkaisu.
Tutkimalla annettua lukujonoa huomaamme, että jos aina valitsemalla kynnykseksi esimerkiksi $K = 1/\epsilon$ saamme osoitettua väitteen. Lisäksi käytämme hyödyksemme O1:sen tulosta. Muotoillaan todistus.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja olkoon $K = 1/\epsilon$. Nyt kun $n > K$ pätee

$$\left|\frac{1}{7^n} - 0\right| = \frac{1}{7^n} \overset{(O1)}{\leq} \frac{1}{1 + 6n} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{K} = \epsilon$$

K1. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2}{3n + 4} = \infty.$$

Ratkaisu.
Lukujono kasvaa rajatta jos sen kaikki jäsenet ovat mielivaltaisesti valittua lukua $M > 0$ suuremmat jonkin kynnyksen K jälkeen. Jälleen lukujonoa

tutkimalla huomaamme, että kynnykseksi K voidaan aina valita esimerkiksi luku $7M$. Muotoillaan todistus.

Olkoon M > 0 ja valitaan $K = 7M$. Nyt kun $n > K$ pätee, että

$$\frac{n^2+2}{3n+4} \geq \frac{n^2}{3n+4} \geq \frac{n^2}{3n+4n} = \frac{n^2}{7n} = \frac{n}{7} > \frac{K}{7} = M$$

K2. Selvitä luvun e määritelmän avulla

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{5n})^n.$$

Tehtävässä saa käyttää tietoa: jos $x_n \to a$ kun $n \to \infty$, niin $\sqrt[5]{x_n} \to \sqrt[5]{a}$.

Ratkaisu.
Luku e saadaan raja-arvona

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Tehtävässä annettu lukujono muistuttaa vihjeen mukaisesti suuresti Neperin luvun muodostavaa lukujonoa. Käytetään tätä tietoa hyväksi. Koska lukujono (x_n), $x_n = (1 + 1/n)^n$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ suppenee, niin jokainen sen osajonokin suppenee ja vieläpä samaa raja-arvoa e kohti. Tällöin myös osajonolle $(x_{k_n}) = (x_5, x_{10}, x_{15}, \ldots)$, missä $k_n = 5n$ pätee, että

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{5n} = e$$

Nyt hyödyntämällä tehtävässä annettua tietoa, että jos $x_n \to a$ kun $n \to \infty$, niin $\sqrt[5]{x_n} \to \sqrt[5]{a}$ saamme että:

$$\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n = \sqrt[5]{\left(\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n\right)^5} = \sqrt[5]{\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{5n}} \to \sqrt[5]{e},$$

kun $n \to \infty$.

K3. Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to a \in \mathbb{R}$, kun $n \to \infty$.

(a) Oletetaan, että $a > 0$. Osoita, että $x_n y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. Vihje: $y_n > \frac{a}{2}$ kun n on kyllin suuri. (Tulos ilmaistaan usein sääntänä $a\infty = \infty$, kun $a > 0$.)
(b) Oletetaan, että $a < 0$.Osoita, että $x_n y_n \to -\infty$ kun $n \to \infty$. Tulos ilmaistaan usein sääntönä $a\infty = -\infty$, kun $a < 0$
(c) Onko olemassa sääntöä $0\infty = \ldots$?

Ratkaisu.
(a) Oletetaan, että $a > 0$. Vihjeen mukaisesti, koska y_n suppenee kohti lukua a, on olemassa sellainen kynnys $K_y > 0$, että aina kun $n > K_y$ pätee, että $|y_n - a| < a/2$. Itseisarvolemma antaa, että $-a/2 < y_n - a < a/2$, josta saadaan että $y_n > a/2$. Hetken tehtävän lukujonoa tutkittuamme voimme muotoilla todistuksen.

Olkoon $M > 0$. Koska x_n kasvaa rajatta, on olemassa sellainen kynnys $K_x > 0$ että $x_n > (2/a)M$ kaikilla $n > K_x$. Olkoon $K > max(K_y, K_x)$. Tällöin aina kun $n > K$ pätee, että

$$x_n y_n > x_n \frac{a}{2} = \frac{a}{2} x_n > \frac{a}{2}\frac{2}{a} M = M$$

(b) Lukujono vähenee rajatta jos sen kaikki jäsenet ovat mielivaltaisesti valittua lukua $M < 0$ pienemmät jonkin kynnyksen K jälkeen. Oletetaan, että $a < 0$. Kohdan (a) mukaisesti on olemassa sellainen kynnys $K_y > 0$, että aina kun $n > K_y$ pätee, että $|y_n - a| < -a/2$. Itseisarvolemma antaa, että $a/2 < y_n - a < -a/2$, josta saadaan että $y_n < a/2$. Muotoillaan todistus.

Olkoon $M < 0$. Koska x_n kasvaa rajatta, on olemassa sellainen kynnys $K_x > 0$ että $x_n > (2/a)M$ eli että $-x_n < -(2/a)M$ kaikilla $n > K_x$. Olkoon $K > max(K_y, K_x)$. Tällöin aina kun $n > K$ pätee, että

$$x_n y_n < x_n \frac{a}{2} = (-x_n)(-\frac{a}{2}) < (-\frac{a}{2})(-x_n) < (-\frac{a}{2})(-\frac{2}{a}M) = M$$

(c) Jos sääntö 0∞ olisi olemassa täytyisi lukujonojen (x_n) ja (y_n) tulon raja-arvo olla yksikäsitteisesti määrätty. Huomataan kuitenkin helposti, että tämä ei pidä paikkaansa, sillä jos valitaan esimerkiksi $y_n = 1/n$ ja $x_n = n$, niin $x_n y_n = n(1/n) = 1 \to 1$, kun $n \to \infty$. Toisaalta jos valitaan $y_n = 1/n^2$ saamme että $x_n y_n = n(1/n^2) = 1/n \to 0$.