TEHT 01 /40

ANALYYSI I

Lause 4.7 toteaa: Olkoot $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Tällöin

(1) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$

(2) $\lim_{n\to\infty} (r x_n) = ra$, missä $r \in \mathbb{R}$ on vakio

(3) $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$ ja $y_n \neq 0$

Lisäksi tiedämme, että $\lim_{n\to\infty} c = c$ kun c on vakio (*)
ja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (**)

Tutkitaan raja-arvoa käyttäen näitä tietoja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n\left(2+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n}}{2+\frac{2}{n}} \overset{(4)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)} \overset{(*)}{=} \frac{1 + \lim_{n\to\infty}\left((-3)\cdot\frac{1}{n}\right)}{2 + \lim\left(2\cdot\frac{1}{n}\right)} \overset{(2)}{=} \frac{1 + \lim_{n\to\infty}(-3)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2 + \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$\overset{(*),(**)}{=} \frac{1 + (-3)\cdot 0}{2 + 2\cdot 0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

TEHT 02 | 40

Sijoittaessa $n=1$, $\frac{n+1}{n}=2$ ja lauseke näyttäisi saavan n:ää suurennettaessa aina vain pienempiä arvoja. Kuitenkin $n+1>n$ kaikilla n, joten $\frac{n+1}{n}>1$. Näiden perusteella supremum ja infimum voisivat siis olla 2 ja 1

Osoitetaan että 2 on joukon yläraja

$\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} \leq 1+1 = 2$ kun $n = 1,2,3\ldots$ $\Rightarrow$ 2 on yläraja

Osoitetaan että 2 on joukon pienin yläraja

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $2-\varepsilon$ ei ole joukon yläraja, sillä valittaessa $n=1$

$\frac{n+1}{n} = 2 > 2-\varepsilon$ $\Rightarrow$ 2 on pienin yläraja

On osoitettu että 2 on joukon supremum

Osoitetaan että 1 on joukon alaraja

$n \geq 1 \Rightarrow \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} \geq 1$ eli 1 on joukon alaraja

Osoitetaan että 1 on joukon suurin alaraja

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $1+\varepsilon$ ei ole joukon yläraja, sillä kun $n > \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} < 1+\varepsilon$

eli 1 on joukon suurin alaraja

On osoitettu että 1 on joukon infimum

Luku 2 kuuluu joukkoon, sillä $\frac{1+1}{1}=2$, joten joukolla on suurin alkio.

Luku 1 ei kuulu joukkoon, sillä $\frac{n+1}{n} > 1$ kaikilla n:n arvoilla. Joukolla ei siis ole pienintä alkiota.

TEHT K1 | 40

ANALYYSI I

Tutkitaan raja-arvolauseketta: $\frac{2n^2-3n}{3n^2-2} = \frac{2-\frac{3}{n}}{3-\frac{2}{n^2}}$

Tiedämme, että $\lim_{n\to\infty} 3 = 3$, $\lim_{n\to\infty} 2 = 2$ ja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Lauseen 4.7 (2) mukaan $\lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n} \cdot \lim \frac{1}{n} = 0$

ja edelleen $\lim(-\frac{3}{n}) = \lim(-3)\frac{1}{n} = \lim(-3) \cdot \lim \frac{1}{n} = (-3)\cdot 0 = 0$

$\lim(-\frac{2}{n^2}) = \lim(-2)\frac{1}{n^2} = \lim(-2)\lim\frac{1}{n^2} = (-2)\cdot 0 = 0$

Lauseen 4.7 (1) mukaan $\lim(2-\frac{3}{n}) = \lim 2 + \lim(-\frac{3}{n}) = 2+0 = 2$

ja $\lim(3-\frac{2}{n^2}) = \lim 3 + \lim(-\frac{2}{n^2}) = 3+0 = 3$

Lauseen 4.7 (4) mukaan $\lim \frac{2-\frac{3}{n}}{3-\frac{2}{n^2}} = \frac{\lim(2-\frac{3}{n})}{\lim(3-\frac{2}{n^2})} = \frac{2}{3}$

TEHT K2/40

Oletetaan että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$. Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee $|x_n - a| < \varepsilon$ kun n on riittävän suuri. Erityisesti pätee $|x_n - a| < 1$ kun $n > K$. Näytetään että K on haluttu kynnys.

Jos $a = 0$

$|x_n - a| = |x_n| < 1 = |a| + 1$ eli $|x_n| \leq |a| + 1$ kun $n > K$

Jos $a > 0$, $|a| = 1$. Käytetään itseisarvolemmaa ja jaetaan yhtälö $|x_n - a| < 1$ kahteen osaan:

i) $x_n - a < 1 \Rightarrow x_n < a + 1 = |a| + 1$

ii) $x_n - a > -1 \Rightarrow x_n > a - 1 > -a - 1 = -|a| - 1 = -(|a| + 1)$

Yhdistetään tulokset ja käytetään itseisarvolemmaa

$-(|a|+1) < x_n < |a| + 1 \Rightarrow |x_n| < |a| + 1$ kun $n > K$

Jos $a < 0$ $|a| = -a$. Toimitaan kuten yllä

i) $x_n - a = x_n + |a| < 1 \Rightarrow x_n < -|a| + 1 < |a| + 1$

ii) $x_n - a = x_n + |a| > -1 \Rightarrow x_n > -|a| - 1 = -(|a| + 1)$

$\Rightarrow -(|a|+1) < x_n < |a| + 1 \Rightarrow |x_n| < |a| + 1$ kun $n > K$

On siis olemassa kynnys K jolle kaikilla $n > K$ pätee $|x_n| < |a| + 1$ □

Jos luku 1 halutaan korvata luvulla 10^{-1000}, valitsemme kynnykseksi sellaisen K' että $|x_n - a| < 10^{-1000}$ kun $n > K'$.

TEHT K3 | 40

Oletetaan että jono (y_n) suppenee. Merkitään $\lim_{n \to \infty} y_n = a$ jolloin $|y_n - a| < 1$ kun $n > K$ jollakin K. Itseisarvolemmasta seuraa

$y_n - a < 1 \Rightarrow y_n < a + 1$

Oletamme myös että kaikilla n $x_n \leq y_n$. Tästä seuraa edellisen nojalla

$x_n < a + 1$ kun $n > K$

Koska oletamme että x_n on nouseva, $x_{n+1} \geq x_n$ kaikilla n eli

$x_m \leq x_n$ kun $m < n$ joten $x_n < a + 1$ kaikilla n

Toisin sanoen (x_n) on ylhäältä rajoitettu.

Lauseen 4.8 mukaan ylhäältä rajoitettu nouseva lukujono suppenee, joten (x_n) suppenee.