MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Tehtävät viikolle 38, alkuviikko
Ratkaisuehdotukset (Esko Heinonen)

Huom: Joissakin tehtävissä on hyötyä tiedoista $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$, jne. (Nämä voi tarkistaa suorittamalla kertolaskut.)

O.1 Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $|x-3| < 2^{-100}$? Arvaa ensin vastaus ajattelemalla erotuksen itseisarvoa etäisyytenä. Todista sitten väite itseisarvolemman avulla ($|x| < a$ jos ja vain jos $-a < x < a$;tässä a on positiivinen.) Anna vastaus välin muodossa. Käsittele epäyhtälöitä huolellisesti!

Ratkaisu: Ajattelemalla itseisarvo etäisyytenä (kuten yleensä tapana onkin), voidaan ajatella, että epäyhtälön $|x-3| < 2^{-100}$ totetuttavat luvut, jotka ovat hyvin lähellä lukua 3, tarkemmin sanottuna luvut joiden etäisyys luvusta 3 on korkeintaan 2^{-100}. Välinä vastaus olisi $]3-2^{-100}, 3+2^{-100}[$.

Osoitetaan sama nyt tehtävänannossa mainitun itseisarvolemman avulla käyttämällä ekvivalenssinuolia sanonnan ”jos ja vain jos”sijaan:

$$
\begin{aligned}
& |x-3| < 2^{-100} \\
\Leftrightarrow\ & -2^{-100} < x-3 < 2^{-100} \\
\overset{*}{\Leftrightarrow}\ & 3-2^{-100} < x < 3+2^{-100}.
\end{aligned}
$$

Välin muodossa tämä on $]3-2^{-100}, 3+2^{-100}[$.

*Kun lukuja ”siirtää”toiselle puolelle epäyhtälö- tai yhtäsuuruusmerkkiä, niin tulee muistaa, että myös etumerkki vaihtuu. Toisaalta tämän voi ajatella siten, että yhtälössä lisätään puolittain luku 3, jolloin se tulee positiivisena vasemmalle ja oikealle, ja keskellä se kumoaa luvun -3. Monesti on kuitenkin järkevää hajottaa tämän kaltaiset epäyhtälöt kahdeksi erilliseksi epäyhtälöksi, jolloin on helpompi välttää laskuvirheet.

Huomautus. Lukiossa on luultavasti totuttu käyttämään avoimelle välille merkintää $]a,b[$, mutta yhtäpitävästi avointa väliä voidaan merkitä (a,b), joten ei kannata hämääntyä, jos tällaiseen merkintään törmää. Suljettua väliä sen sijaan merkitään aina $[a,b]$.

O2. Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $|2x-7|<1$? Anna vastaus välin muodossa. Muuta epäyhtälö ensin muotoon $|x-a|<b$.

Ratkaisu: Noudatetaan tehtävänannon ohjetta ja muutetaan epäyhtälö ensin haluttuun muotoon. Käytämme tässä jälleen ekvivalenssinuolia lyhentämään merkintöjä.

$$\begin{aligned} & |2x-7|<1 \\ \Leftrightarrow\ & \left|2(x-\frac{7}{2})\right|<1 \\ \Leftrightarrow\ & 2\left|x-\frac{7}{2}\right|<1 \\ \Leftrightarrow\ & \left|x-\frac{7}{2}\right|<\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Siis alkuperäinen epäyhtälö on yhtäpitävä sen kanssa, että $|x-\frac{7}{2}|<\frac{1}{2}$. Nyt edellisen tehtävän tapaan itseisarvolemman nojalla saamme

$$\begin{aligned} & \left|x-\frac{7}{2}\right|<\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{2}<x-\frac{7}{2}<\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{7}{2}-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}+\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{6}{2}<x<\frac{8}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 3<x<4. \end{aligned}$$

Siis epäyhtälön toteuttavat ne luvut x, jotka kuuluvat avoimelle välille $]3,4[$.

K1. Etsi sellainen luku $K>0$, että kaikilla välille $]0,2[$ kuuluvilla luvuilla x pätee $|x^2-1|\leq K|x-1|$. Arvioi!

Ratkaisu: Huomataan, että x^2-1 voidaan kirjoittaa muodossa $(x+1)(x-1)$. Lisäksi, kun $x\in]0,2[$, niin pätee

$$1<x+1<2+1=3.$$

Sovelletaan nyt näitä ja tietoa $|xy|=|x||y|$ tehtävän itseisarvoon:

$$|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|=|x+1||x-1|<3|x-1|.$$

Luvuksi K voidaan siis valita $K = 3$.

K2. Etsi sellainen luku $K > 0$, että kaikilla välille $]0, 2[$ kuuluvilla luvuilla x pätee $|x^3 - 1| \leq K|x - 1|$.

Ratkaisu: Huomataan, että $x^3 - 1$ voidaan kirjoittaa muodossa $(x - 1)(x^2 + x + 1)$. Lisäksi, kun $x \in]0, 2[$, niin

$$1 < x^2 + x + 1 < 2^2 + 2 + 1 = 7$$

Sovelletaan nyt näitä sekä tietoa $|xy| = |x||y|$ tehtävän itseisarvoon:

$$|x^3 - 1| = |(x - 1)(x^2 + x + 1)| = |x - 1||x^2 + x + 1| < 7|x - 1|.$$

Luvuksi K voidaan siis valita $K = 7$.

K3. (a) Minkä välin muodostavat ne reaaliluvut x, joiden likiarvo kahden desimaalin tarkuudella on 23,14. Muistele koulun pyöristyssääntöjä.

(b) Oletetaan, että $|x - e^\pi| < 2^{-1}10^{-1}$. Mitä tiedät tämän nojalla luvun x desimaalikehitelmästä?

(c) Entä jos $|x - e^\pi| < 2^{-1}10^{-23}$?

(Luvun e^π kehitelmä alkaa näin:
23,14069263277926900572908636794854738026610624260021.)

Ratkaisu: (a) Reaaliluvut $23,14 \pm \varepsilon$ pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella lukuun $23,14$, jos $0 \leq \varepsilon < 0,005$. Lisäksi luku $23,135$ pyöristyy lukuun $23,14$. Kysytty väli on siis

$$\{23,135\} \cup]23,14 - 0,005; 23,14 + 0,005[= [23,135; 23,145[.$$

(b) Itseisarvolemman ja alkupään tehtävien nojalla annettu tieto voidaan kirjoittaa muodossa $(2^{-1}10^{-1} = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05)$

$$e^\pi - 0,05 < x < e^\pi + 0,05.$$

Nyt hyödyntämällä luvun e^π desimaalikehitelmää voidaan sanoa, että

$$x > e^\pi - 0,05 > 23,14 - 0,05 = 23,09$$

ja

$$x < e^\pi + 0,05 < 23,141 + 0,05 = 23,191$$

Huomataan myös, että lukujen x ja e^{π} desimaalikehitelmissä ei tarvitse olla samoja desimaaleja.

(c) Jos olisimme edellisessä kohdassä käyttäneen luvun 0,05 sijasta lukua $0,005 = 2^{-1} \cdot 10^{-2}$, olisimme huomanneet, että

$$23,135 < x < 23,147,$$

joten luvun x desimaalikehitelmässä on vähintään yksi sama desimaali kuin luvun e^{π} desimaalikehitelmässä. Vastaavasti voidaan todeta, että lukujen x ja e^{π} desimaalikehitelmissä ensimmäiset 22 desimaalia ovat samat.