Institutionen för matematik och statistik
Analys I
Uppgifter för vecka 49 (3.12-7.12.2012)

I följande uppgifter behandlas de transcendenta funktionerna från kompendiets slutdel.

Uppgifter för början av veckan

O1. Derivera $x^{\frac{2}{5}}$
(a) genom att tolka funktionen som en sammansatt funktion och sedan tillämpa deriveringsreglerna för potenser och inversa funktioner;
(b) genom att tillämpa deriveringsregeln för potensfunktioner på bråktalsexponenten.

O2. Skissera graferna för uttrycken e^x, e^{-x}, $-e^{-x}$ i samma bild. Notera "speglingarna"! Skissera med hjälp av dessa grafer graferna för de hyperboliska funktionerna sinh och cosh.

K1. Visa med hjälp av rotfunktionens definition och räknereglerna för potensfunktioner (med heltal som exponent) att då $x > 0$ så gäller att
(a)

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m;$$

(b)

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[np]{x})^{mp}.$$

K2. Bestäm

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log(\frac{1}{x})}{1-x}.$$

Observera att kvotuttrycket i själva verket är en differenskvot. Alternativt kan man direkt använda sig av den enkla formen av l'Hôspitals regel på sida 62 (vilket egentligen är samma sak).

K3. Härled logaritmframställningen samt deriveringsformeln för inversfunktionen av sinh. Undersök sidorna 84-86 i kompendiet.

Uppgifter för slutet av veckan

O3. Beräkna $f'(2)$ då $f(x) = \operatorname{ar\,sinh} x$ för alla x.

O4. Var är funktionen $\sin x$ konvex? Definitionen för konvexitet finns på sidan 61.

K4. Låt oss undersöka funktionerna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierade som $f(x) = x + \sin x$ och $g(x) = \frac{x}{2} + \sin x$. Bestäm funktionernas lokala extremvärden.

K5. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för alla $x > 0$ gäller att

$$\cos x > 2 - \cosh x.$$

(Uppgiften är första steget till en mer intressant iakttagelse. Undersök, om möjligt, graferna för $\cos x$ och $2 - \cosh x$ i intervallet [-1,1] med en grafisk kalkylator. Något intressant borde vara uppenbart, och en förklaring till detta kan ges med hjälp av medelvärdessatsen. En mer naturlig förklaring ges på kursen Analys II då Taylor polynom behandlas.)

K6. Härled ekvationen

$$\mathrm{D}\ (\operatorname{ar\,cosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

då $x > 1$. Undersök sidorna 84-86 i kompendiet!