Institutionen för matematik och statistik
Analys I
Uppgifter för vecka 48 (26.11-30.11.2012)

I följande uppgifter behandlas frågor om medelvärdessatsen m.m. från kapitel 8. Egenskaper som kontinuitet och deriveringsregler får användas för kända funktioner från gymnasiet som exempelvis de trigonometriska funktionerna.

En del av veckans uppgifter påminner om uppgifter från skolan; kom dock ihåg att motivera svaren med hjälp av innehållet från denna kurs!

Uppgifter för början av veckan

O1. Låt oss undersöka funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definierad som $f(x) = x^4$. Bestäm en sådan punkt ξ som ges av medelvärdessatsen.

O2. Undersök eventuella största och minsta värden samt lokala extremvärden hos funktionen $f\colon [0,7] \to \mathbb{R}$ då

$$f(x) = |(x-2)^2 - 1|$$

för alla $x \in [0,7]$. Motivera noggrant! (Påminn hur lokala extremvärden är definierade i kompendiet på sidorna 57-58.)

K1. Anta att funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ och deriverbar i intervallet $]0,1[$. Anta även att $f(0) = 3$ och att för alla $x \in]0,1[$ gäller att $-1 < f'(x) < 2$. Vad vet vi på basen av detta om värdet $f(1)$?

K2. Anta att funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ och deriverbar i intervallet $]0,1[$. Anta även att $f(1) = 3$ och att för alla $x \in]0,1[$ gäller att $-1 < f'(x) < 2$. Vad vet vi på basen av detta om värdet $f(0)$?

K3. Anta att f är kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ och att för alla $x \in]0,1[$ gäller
(a) $f'(x) \leq 1$;
(b) $f'(x) \leq x^7$.
Vad vet vi om värdet $f(1)$ i fallen (a) och (b) om $f(0) = 2$? I (b)-fallet lönar det sig att undersöka den hjälpfunktion som definieras av $\frac{1}{8}x^8 - f(x)$.

Uppgifter för slutet av veckan

O3. Anta att $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och deriverbar. Anta även att för alla $x \in]-1,1[$ gäller att $|f'(x)| \leq 10$. Ge ett exempel på ett sådant tal $\delta > 0$ att för alla $x, y \in]-1,1[$ gäller att om $|x-y| < \delta$ så är $|f(x)-f(y)| < 10^{-2010}$.

O4. Visa att funktionen $f(x) = x^7$ har en överallt definierad invers funktion $\sqrt[7]{y}$. Var är denna funktion deriverbar? Betrakta speciellt punkten $y = 0$. Sidorna 44 och 50-51 i kompendiet kan vara till hjälp.

K4. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för alla x gäller att $|\cos x - 1| \leq |x|$. (Det lönar sig att komma ihåg att $\cos 0 = 1$.)

K5. Anta att $a_1, \ldots, a_n$ är reella tal. För vilket x antar den s.k. kvadratsumman $(x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$ sitt minsta möjliga värde?

K6. Anta att $h > 0$ och att funktionen $f\colon]x_0-h, x_0+h[\to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $]x_0-h, x_0+h[$ och deriverbar i intervallen $]x_0-h, x_0[$ och $]x_0, x_0+h[$. Anta även att

$$\lim_{x \to x_0{}^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0{}^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}.$$

Visa att f är deriverbar i punkten x_0 och att $f'(x_0) = A$. Tips: tillämpa medelvärdessatsen på differenskvoten.