Institutionen för matematik och statistik
Analys I
Uppgifter för vecka 46 (12.11-16.11.2012)

I följande uppgifter får man inte använda sig av det man har lärt sig om derivatan i gymnasiet.

Uppgifter för början av veckan

O1. Låt funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad som $f(x) = x^5 + x^3 + 1$. Visa med hjälp av Bolzanos sats att det existerar ett $x \in \,]0, 1[$ för vilket $f(x) = 2$ gäller.

O2. Låt funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad som $f(x) = x^5 + x^3 + 1$. Visa med hjälp av Bolzanos sats att det existerar ett x för vilket $f(x) = 2012$ gäller.

K1. Visa att

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$$

är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$.

K2. Visa med hjälp av definitionerna att

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \to \infty$$

då $x \to \infty$ och att

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \to -\infty$$

då $x \to -\infty$.

K3. Visa med hjälp av Bolzanos sats att det existerar ett x för vilket

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 2012$$

gäller.

Uppgifter för slutet av veckan

O3. Visa att funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad som $f(x) = x + x^3$ har en invers funktion $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vilka egenskaper vet man att denna inversa funktion har?

O4. Visa att i värdemängden för funktionen definierad av $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ finns ett minsta värde, dvs. visa att det existerar ett sådant a att för alla x gäller att $f(x) \geq f(a)$.

K4. Visa att funktionen $f\colon [0,1] \to [0,2]$ definierad som $f(x) = x + x^3$ har en invers funktion $f^{-1}\colon [0,2] \to [0,1]$.

K5. Låt oss definiera funktionen $f\colon [0,\infty] \to \mathbb{R}$ som $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$. Är funktionen strängt växande? Är den kontinuerlig? Har funktionen f en invers funktion?

K6. Anta att funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och satisfierar olikheten $0 \leq f(x) \leq 3$ för alla x. Visa att i värdemängden för funktionen definierad av

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$$

finns ett största värde. Det vill säga, visa att det existerar ett sådant a att för alla x gäller att $g(x) \leq g(a)$.