Institutionen för matematik och statistik
Analys I
Uppgifter för vecka 45 (5.11-9.11.2012)

Uppgifter för början av veckan

O1. Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

och att

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

O2. Utred

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{x^2+1}$$

med hjälp av sats 5.4.

K1. Utred

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^3+x^2+x}{x^2+7}$$

med hjälp av sats 5.4.

K2. Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{7x+1} = \frac{1}{7}.$$

K3. Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{5}{x-3} = \infty.$$

Uppgifter för slutet av veckan

O3. Anta att funktionen $f\colon]0,2[\to \mathbb{R}$ är växande. Anta också att den är diskontinuerlig i punkten $x = 1$. Vad vet vi på basen av detta?

O4. Anta att funktionen $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ satisfierar kraven $f(x) = x - 2n$ då $2n \le x \le 2n+1$ och $f(x) = 2n+2-x$ då $2n+1 < x < 2n+2$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Rita grafen till funktionen. Existerar gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} f(x)?$$

K4. Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{5+x}{3-x} = -\infty.$$

K5. Anta att $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ är växande och att $a < c < b$. Visa att

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\to c^+} f(x).$$

K6. Anta att $f\colon]0,2[\to \mathbb{R}$ satisfierar kraven $f(1) = 3$ och $f'(1) = 5$. Visa att det existerar ett sådant $\delta > 0$ att för alla x gäller följande: om $1 < x < 1+\delta$ så är

$$(5 - 1/7)(x-1) < f(x) - 3 < (5 + 1/7)(x-1).$$

(Det lönar sig att tillämpa gränsvärdets definition för funktioner på differenskvoten $E(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Då $|x-1|$ är tillräckligt litet (och $x \neq 5$) så är $|E(x) - 5| < 1/7$. Rita bild!)