Institutionen för matematik och statistik
Analys I
Uppgifter för vecka 40 (1.10-5.10.2012)

Denna gång får uppgifterna lösas genom att använda både definitionen och satser om gränsvärdet för talföljder. Vi bekantar oss också med supremum och infimum och deras användning.

Uppgifter för början av veckan

O1. Utred gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{2n+2}$$

genom att tillämpa sats 4.7. Kom ihåg satsens "om, så" -struktur! I uppgiften får man utgå från gränsvärdet för en konstant talföljd samt att $\frac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty$.

O2. Bestäm supremum och infimum för mängden

$$\{\frac{n+1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

Har mängden ett största eller minsta element?

K1. Utred gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n}{3n^2-2}$$

genom att tillämpa sats 4.7. Kom ihåg satsens "om, så" -struktur! I uppgiften får man utgå från gränsvärdet för en konstant talföljd samt att $\frac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty$.

K2. Anta att $x_n \to a$ då $n \to \infty$. Visa att det existerar en tröskel K för vilket det gäller för alla $n > K$ att

$$|x_n| \leq |a| + 1.$$

Kan man ersätta talet 1 med talet 10^{-100}? Obs: eftersom det alltid existerar ett största element i en ändlig mängd reella tal så följer det att varje konvergerande talföljd är begränsad.

K3. Anta att för alla n gäller att $x_n \leq y_n$. Anta dessutom att följden (x_n) är växande och att följden (y_n) konvergerar. Visa att följden (x_n) konvergerar.

Uppgifter för slutet av veckan

O3. Anta att

$$\lim_{n\ \to\infty} x_n = a,$$

och att $a \neq 0$. Visa att det existerar ett heltal K för vilket det för alla $n > K$ gäller att

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Uppgiften är speciellt uppenbar om man undersöker separat fallen då $a < 0$ och $a > 0$. Rita en bild av båda fallen.

O4. Induktion...?! Vad vet du om det? Vad vill du veta du angående induktionsprincipen?
Visa att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller att

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

K4. Anta att följden (x_n) konvergerar. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n)^7}{n} = 0.$$

Tips: Kom ihåg att en konvergerande talföljd är alltid begränsad.

K5. Visa på samma vis som på föreläsningarna att det existerar ett reellt tal $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ och } x^2 < 7\}$ och dessutom att $a^2 = 7$. (I uppgiften visar man alltså att existensen av $\sqrt{7}$ följer ur reella talens axiom!)

K6. Visa på samma vis som på föreläsningarna att följden (x_n) konvergerar och har gränsvärdet $\sqrt{7}$ om vi definierar $x_1 = 3$ och att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{7}{x_n}).$$

Bonusfrågor(krävs inte för att ha gjort uppgiften): (a) Varför verkar det som att följden konvergerar snabbt? (b) Ge ett exempel på ett index n för vilket $|x_n - \sqrt{7}| < 10^{-100}$ gäller.