MATERIAL FÖR ANDRA KURSPROVET (Analys I).

Detta är övningsmaterial för andra kursprovet i Analys I. Provområdet utgörs av senare delen av kursen från och med gränsvärdet av funktioner till slutet av kursen. Denna samling av uppgifter försöker ge en noggrannare bild av de centrala färdigheterna.

1. Visa på basen av definitionen av gränsvärdet för en funktion att
$$\lim_{x\to 3} x^3 = 27.$$
2. Visa på basen av definitionen av gränsvärdet för en funktion att
$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}.$$
3. Visa på basen av definitionen av gränsvärdet för en funktion att påståendet
$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{5}{6}$$
inte gäller.
4. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en funktion att
$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}.$$
Tolka resultatet som en derivata.
5. Visa på basen av definitionen av gränsvärdet och av kontinuiteten för en funktion att funktionen f som satisfierar $f(x) = x^2 - 3x$ för varje x, är kontinuerlig i punkten $x = 2$.
6. Visa på basen av definitionen av gränsvärdet och av derivatan för en funktion att funktionen f som satisfierar $f(x) = x^2 - 3x$ för varje x, är deriverbar i punkten $x = 2$.
7. Anta att $|f(x)| \le 2$ för varje $x \in]-1,1[$. Definiera funktionen $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ med villkoret $g(x) = xf(x)$.Visa att g är kontinuerlig i punkten $x = 0$.
8. Anta att $|f(x)| \le 2$ för varje $x \in]-1,1[$. Definiera funktionen $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ med villkoret $g(x) = x^2 f(x)$. Visa att g är deriverbar i punkten $x = 0$.
9. Bestäm
$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^3 + x^2 + 3x}{3x^2 + 2x + 1}$$
på basen av kursens satser.

10. Visa på basen av definitionen av gränsvärdet och av derivatan för en funktion att funktionen $f :]0,3[\to \mathbb{R}$, för vilken

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

för varje $x \in]0,3[$, är deriverbar i punkten $x = 2$ samt att $f'(2) = -2$.

11. Anta att $\lim_{x\to 4} f(x) = 7$. Visa på basen av definitionen av gränsvärdet för en funktion att $\lim_{x\to 2} f(x^2) = 7$.

12. Visa på basen av definitionen att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x^2+1} = 1.$$

13. Visa på basen av definitionen att

$$\lim_{x\to 7-} \frac{x+7}{x-7} = -\infty.$$

14. Anta att $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ satisfierar villkoren $f(0) = 0$ och $f'(0) = 2$. Visa att det finns ett sådant $h > 0$ att för varje x gäller: om $0 < x < h$, så är

$$(2 - \frac{1}{10^{100}})x < f(x) < (2 + \frac{1}{10^{100}})x.$$

Det lönar sig att rita en bild!

15. Visa med hjälp av Bolzanos sats att ekvationen $e^x = \sin x$ har åtminstone en lösning. Motivera noggrant!

16. Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin(x^7)}{x^2+1}.$$

Visa att det finns ett största värde bland de värden som f antar. Tips: sök först en punkt där där f får ett positivt värde.

17. Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin(x^7)}{x^2+1}.$$

Visa att det finns ett minsta värde bland de värden som f antar.

18. Definiera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen $f(x) = x^2|x|$. För vilka x existerar derivatan $f'(x)$? För vilka x existerar andra derivatan $f''(x)$? För vilka x existerar tredje derivatan $f'''(x)$?

19. Derivera $\sqrt{\ln(x^2+3)}$.

20. Betrakta funktionen $f : [0, 2] \to [1, 5]$ för vilken $f(x) = x^2 + 1$ för varje $x \in [0, 2]$. Visa att f har en strängt växande (kontinuerlig) och deriverbar invers funktion $g :]1, 5[\to]0, 2[$. Bestäm $g'(2)$.

21. Betrakta funktionen $f :]0, 7[\to \mathbb{R}$, för vilken $f'(1) = 2$ och $f'(3) = 5$. Visa att det finns ett tal a i intervallet $]1, 3[$ för vilket $f'(a) = 4$. Det lönar sig att studera funktionen som definieras av ekvationen $g(x) = f(x) - 4x$.

22. Visa noggrant att funktionen f inte är deriverbar i punkten $x = 0$, om $f(0) = 0$ och $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ då $x \neq 0$.

23. Anta att $f'(1) = 2$. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1 - h)}{h}.$$

24. Vilken slutsats kan man dra om derivatan till funktionen $f(x) = x^4$ av likheten $(x + h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$ på basen av derivatans karakteriseringssats (Sats 7.1)?

25. Anta att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[1, 3]$ och deriverbar i intervallet $]1, 3[$. Anta dessutom att det för alla $x \in]1, 3[$ gäller att $0 \leq f'(x) \leq 1$. Vad vet man om värdet $f(3)$ om $f(1) = 5$?

26. Anta att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[1, 3]$ och deriverbar i intervallet $]1, 3[$. Anta dessutom att det för alla $x \in]1, 3[$ gäller att $0 \leq f'(x) \leq 1$. Vad vet man om värdet $f(1)$ om $f(3) = 5$?

27. Anta att funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0, 1]$ och deriverbar i intervallet $]0, 1[$. Anta att $f(0) = 7$ och att det för varje $x \in]0, 1[$ gäller att $x < f'(x) < 1$. Vad vet man på basen av detta om värdet $f(1)$? Tips: hjälpfunktionen $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ är användbar.

28. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för alla x gäller att

$$|\cos x - 1| \leq |x|.$$

(Kom ihåg att $\cos 0 = 1$.)

29. Anta att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och deriverbar. Anta dessutom att det för alla x gäller att $|f'(x)| < 7$. Ge exempel på ett sådant tal $\delta > 0$ att för alla $x, y \in \mathbb{R}$ gäller: om $|x - y| < \delta$, så är $|f(x) - f(y)| < 7^{-100}$.

30. Undersök eventuella största och minsta värden samt lokala extremvärden hos funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där

$$f(x) = \sqrt[7]{\frac{x^4}{x^8 + 1}}$$

för all $x \in \mathbb{R}$. Tips: det lönar sig att notera att det räcker att studera funktionen innanför rotuttrycket samt beteckna $t = x^2$. Motivera din lösning!

31. Anta att $h > 0$ och att funktionen $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $]x_0 - h, x_0 + h[$ och deriverbar i intervallen $]x_0 - h, x_0[$ och $]x_0, x_0 + h[$. Anta dessutom att $\lim_{x \to x_0-} f'(x) = \lim_{x \to x_0+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Visa att f är deriverbar i punkten x_0 och att $f'(x_0) = A$. Tips: tillämpa medelvärdessatsen på differenskvoten.

32. Anta att $h > 0$ och att funktionen $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ är deriverbar i intervallet $]x_0 - h, x_0 + h[$. Anta dessutom att $|f'(x)| \leq 7$ då $x_0 - h < x < x_0$ eller $x_0 < x < x_0 + h$. Visa att $|f'(x_0)| \leq 7$.

33. Anta att $h > 0$ och att funktionen $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och deriverbar i intervallet $]x_0 - h, x_0 + h[$. Anta dessutom att

$$\lim_{x \to x_0-} f'(x) = A \quad \text{och} \quad \lim_{x \to x_0+} f'(x) = B.$$

Visa att $f'(x_0) = A = B$.

34. Visa att för alla $x \geq 0$ gäller att $\ln(x + 1) \leq x$.

35. Visa att för alla $x \geq 0$ gäller att $\ln(x + 1) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

36. Förmår du jämföra $\ln(x+1)$ och $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ på samma sätt som i föregående uppgifter, då $x \geq 0$? Kan du hitta en allmän regel?

37. Visa att för alla $x \geq 0$ gäller $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. (Fjärde derivatan hjälper.)

38. Betrakta den funktion i intervallet $]0, 2[$ som definieras av ekvationen $f(x) = x^x$. Bestäm dess lokala extremvärden. Noggranna motiveringar!

39. Betrakta funktionen $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ där $f(x) = e^{-2x} \sin(\sqrt{3}x)$. Utred dess lokala extremvärden. Vad händer med funktionen då $x \to \infty$?

40. Undersök krökningen (dvs. konvexitet eller konkavitet) av funktionen f i $\mathbb{R}$, där $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ för $x \in \mathbb{R}$.