

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

2. kursprovet 15.12.2011

1. Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(x^3 + \frac{3x + 1}{2x + 3} \right)$$

med hjälp av kursens satser. Noggrann motivering!

2. Undersök var funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är växande, då funktionen definieras av ekvationen

$$f(x) = e^{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Visa att ekvationen

$$e^x + e^{x^3} = 1$$

har åtminstone en lösning.

4. Lös en av uppgifterna 4.1 eller 4.2.

4.1. Anta att $f:]0, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i hela intervallet $]0, 2[$. Anta vidare att f är deriverbar i intervallet $]1, 2[$ och att

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \infty.$$

Visa att f inte är deriverbar i punkten $x = 1$.

4.2. Anta att $f:]0, 3[\rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i hela intervallet $]0, 3[$. Anta att $f'(1) = 4$ och $f'(2) = 6$. Vi studerar också den hjälpfunktion som definieras av ekvationen $g(x) = f(x) - 5x$.

(a) Visa att g inte kan få det minsta värdet som g antar i intervallet $[1, 2]$ i någondera ändpunkter.

(b) Visa att det finns en punkt c i intervallet $]1, 2[$ där det gäller att $f'(c) = 5$. (**Obs.** Vi vet inte att f' är kontinuerlig, så att Bolzanos sats kan inte användas!)