

## Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 5, 21.11.2012

Huom. Viimeinen harjoitus (harjoitus 6) on 12.12.

Huom. 22.11. ei ole luentoa, 28.11. klo 12 - 14 on ylimääräinen luento (sali B321), viimeinen luento on 13.12.

1. Todista luentojen liitteen seuraus L4 lähtien lauseen L3 tuloksesta.

2. Olkoon  $L : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  muotoa

$$L(x) = c(x) \exp\left(\int_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right)$$

kaikilla  $x \geq a$ , missä  $a > 0$  on vakio ja  $c(x) \rightarrow c \in (0, \infty)$  ja  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ , kun  $x \rightarrow \infty$ . Osoita, että  $L$  on hitaasti vaihteleva.

3. Olkoot  $X_1, X_2, \dots$  riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Olkoon yhteinen kertymäfunktio  $F$  ja

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Oletetaan, että  $\bar{F}(x) > 0$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(M_n > x)}{n\bar{F}(x)} = 1.$$

b) Olkoon  $\alpha \geq 0$ . Osoita, että jos  $\bar{F} \in R_{-\alpha}$ , niin myös kuvaus  $x \rightarrow \mathbb{P}(M_n > x)$  on säännöllisesti vaihteleva indeksillä  $-\alpha$ .

4. Olkoot  $X$  ja  $Y$  ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Osoita, että

a)  $X + Y$  on paksuhäntäinen, jos joko  $X$  tai  $Y$  on paksuhäntäinen,

b)  $X + Y$  on kevythäntäinen, jos sekä  $X$  että  $Y$  ovat kevythäntäisiä.

5. Olkoot  $\xi_1, \xi_2$  ja  $\xi_3$  riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Olkoon yhteinen kertymäfunktio  $F$ . Oletetaan, että  $\bar{F} \in R_{-\alpha}$ , missä  $\alpha \geq 0$ . Määrittää todennäköisyyden

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 > x, \xi_2 + \xi_3 > x)$$

asymptoottinen muoto, kun  $x \rightarrow \infty$ .