Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 4, 7.11.2012

Kaikissa tehtävissä (X_n) on stationaarinen jono, $\overline{F}$ on muuttujan X_1 kertymäfunktio ja $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Oletetaan, että eräälle reaalilukujonolle (u_n) pätee

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(u_n) = \tau \in (0, \infty). \tag{1}$$

Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(M_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \le u_n\right) \ge 1 - \frac{\tau}{k}.$$

2. (jatkoa) Oletetaan lisäksi, että (X_n) toteuttaa luentojen ehdon (D). Osoita, että

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(M_n \le u_n\right) \ge e^{-\tau}.$$

3. Olkoot $\xi, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia eksponentiaalisesti jakautuneita satunnaismuuttujia odotusarvona 1 ja

$$X_n = \xi_n + \xi_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tunnetusti (X_n) on stationaarinen. Osoita, että (X_n) toteuttaa ehdon (D).

4. (jatkoa) Osoita, että jos (1) toteutuu, niin

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(M_n \le u_n\right) = e^{-\tau}. \tag{2}$$

Tehtävässä oletetaan tunnetuksi seuraava tulos. Olkoon (X_n) stationaarinen jono, joka toteuttaa ehdon (D). Olkoon (u_n) sellainen reaalilukujono, että (1) toteutuu ja

$$L_k = \limsup_{n\to\infty} n \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \mathbb{P}(\xi_1 > u_n, \xi_j > u_n), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Jos $L_k \to 0$, kun $k \to \infty$, niin (2) toteutuu.

5. (jatkoa) Osoita, että on olemassa sellaiset positiivitermiset reaalilukujonot (a_n) ja (b_n) ja ei-degeneroitunut kertymäfunktio G, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right) = G(x).$$