

Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 2, 3.10.2012

1. Olkoot X_1, X_2, \dots riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia odotusarvona $\mu = 1$ ja $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Määää sellaiset x_1 ja x_2 , että

$$\mathbb{P}(M_n \in (x_1, x_2)) = 0.9 \text{ ja } \mathbb{P}(M_n \leq x_1) = \mathbb{P}(M_n \geq x_2),$$

kun $n = 10, 100, 1000$.

2. (jatkoa) Perustele lauseen 2.3 avulla approksimaatiota

$$\mathbb{P}(M_n \leq x + \log n) \sim e^{-e^{-x}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Määää tämän avulla likimääräiset arvot edellisen tehtävän todennäköisyyksille.

3. Olkoon F kertymäfunktio ja

$$x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) < 1\} \in (-\infty, \infty].$$

Oletetaan, että F kuuluu jakauman H vaikutuspiiriin maksimin suhteen. Olkoon G sellainen kertymäfunktio, että

$$\lim_{x \rightarrow x_F^-} \overline{G}(x) / \overline{F}(x) = 1.$$

Osoita, että myös G kuuluu jakauman H vaikutuspiiriin maksimin suhteen.

4. Oletetaan lauseen 2.3.1 merkinnöin, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n^{(2)} \leq u_n) = c \in (0, 1).$$

Osoita, että raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \overline{F}(u_n) \doteq \tau$$

on olemassa ja että $c = e^{-\tau} + \tau e^{-\tau}$.

5. Olkoon F_1, F_2, \dots jono kertymäfunktioita, G ei-degeneroitunut kertymäfunktio $a_n > 0$ ja $b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$. Oletetaan, että

$$F_n(a_{nk} + b_{nk}) \xrightarrow{d} G^{1/k}(x),$$

kaikilla $k = 1, 2, \dots$. Osoita, että G on stabiili maksimin suhteen.