

## Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 1, 19.9.2012

1. Funktiota  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  sanotaan *hitaasti vaihtelevaksi*, jos kaikilla  $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = 1$$

ja *säännöllisesti vaihtelevaksi indeksillä*  $\alpha \in (-\infty, \infty)$ , jos kaikilla  $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha.$$

Olkoon  $q \neq 0$  mielivaltainen. Osoita, että

$$f(x) = (1 + \log x)^q$$

määrittelee hitaasti vaihtelevan funktion ja että

$$f : f(x) = (\sin x + 2)^q,$$

ei ole säännöllisesti vaihteleva millään indeksillä.

2. Osoita, että  $f$  on säännöllisesti vaihteleva indeksillä  $\alpha$ , jos ja vain jos  $f$  on muotoa

$$f(x) = L(x)x^\alpha,$$

missä  $L$  on hitaasti vaihteleva.

3. Olkoon  $F$  kertymäfunktio ja  $\overline{F}$  säännöllisesti vaihteleva indeksillä  $\alpha$ . Osoita, että  $\alpha \leq 0$ . Esitä esimerkki kertymäfunktioista, jonka häntä  $\overline{F}$  on hitaasti vaihteleva.

4. Olkoon  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  sellainen, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \log f(x) = -\beta,$$

missä  $\beta \in (0, \infty)$ . Osoita, että  $f$  ei ole hitaasti vaihteleva.

5. (jatkoa) Osoita, että  $f$  ei ole säännöllisesti vaihteleva millään indeksillä.