Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 8.

1. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$$
symmetrinen $\mathbb{R}$-kertoiminen 2×2-matriisi. Laske A:n ominaisarvot ja osoittaa, että A on aina diagonalisoituva. Ominaisvektorit ei tarvitse laskea.

2. Olkoot $L\colon V \to W$, $L'\colon W \to V$ lineaariset kuvaukset, missä V, W (äärellisulotteiset) K-vektoriavaruudet, K kunta.
Osoita, että operaattoreilla LL' ja $L'L$ on täsmälleen samat ominaisarvot.

3. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarinen operaattori, $\dim V = n$. Olkoon $f \in V^*$ operaattorin $L^*\colon V^* \to V^*$ ominaisvektori. Osoita, että $\operatorname{Ker} f$ on $n-1$-ulotteinen V:n aliavaruus, joka on invariantti L:n suhteen.

4. Kompleksiluvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *konjugaatti* $\bar{z}$ määritellää kaavalla $\bar{z} = x - iy$.

   a) Osoita, että kuvaus $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\phi(z) = \bar{z}$ on $\mathbb{R}$-algebrojen välinen isomorfismi. Mikä on sen käänteiskuvaus?

   b) Osoita, että kaikilla $z \in \mathbb{C}$ luvut $z\bar{z}$, $z + \bar{z}$ ovat reaalilukuja.

   c) Olkoon $p = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ $\mathbb{R}$-kertoiminen polynomi. Oletetaan, että kompleksiluku $z \in \mathbb{C}$ on sen juuri. Osoita, että tällöin myös $\bar{z}$ on p:n juuri.

   d) Päättele, että jokainen polynomi $p \in \mathbb{R}[X]$ voidaan kirjoittaa ensimmäisen ja toisen asteen polynomien tulona.

5-6. Olkoon Q kompleksisen matriisialgebran $M(2\times 2; \mathbb{C})$ osajoukko, jonka muodostavat muotoa
$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$$
olevat matriisit. Tässä $z, w \in \mathbb{C}$ ja $\bar{z}$ on niin sanottu kompleksiluvun $z = x+iy$ *konjugaatti* $\bar{z} = x - iy$.

   a) Osoita, että Q on suljettu matriisien yhteenlaskun, skalaarikertolaskun ja kertolaskun suhteen, eli muodostaa $M(2 \times 2; \mathbb{C})$:n $\mathbb{C}$-alialgebran. Erityisesti se on myös $\mathbb{R}$-algebra.

   b) Osoita, että jokainen $A \in Q, A \neq 0$ on kääntyvä ja $A^{-1} \in Q$.

   c) Olkoot
$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$
Osoita, että $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ on Q:n kanta $\mathbb{R}$:n suhteen. Laske kaikki tulot xy, missä $x, y \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

d) Osoita, että yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ on Q:ssä äärettömän monta ratkaisua.

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.