Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 7.

1. Olkoon $M$ $n$-ulotteinen $R$-moduli ja $\mathbf{e}$ jokin sen kanta. Olkoon $F\colon M \times M \to R$ bilineaarinen muoto. Määritellään sen *matriisi* $[F]_{\mathbf{e}} = A = (a_{ij})$ kannan $\mathbf{e}$ suhteen $(n \times n)$-neliömatrisiina, jolle $a_{ij} = F(e_i, e_j)$ (älä sekoita tätä konstruktiota lineaarikuvauksen matriisin kanssa!).
   a) Osoita, että $F$ on symmetrinen/antisymmetrinen muoto jos ja vain jos sen matriisi (kiinnitetyssä mielivaltaisessa $M$:n kannassa) on symmetrinen/antisymmetrinen matriisi.
   Muistutus: neliömatriisi $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; R)$ on symmetrinen jos $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$ ja antisymmetrinen jos $a_{ij} = -a_{ji}$ kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$.
   b) Osoita, että $F$ on alternoiva jos ja vain jos sen matrisi (kiinnitetyssä mielivaltaisessa $M$:n kannassa) on antisymmetrinen ja sen diagonaalialkiot ovat kaikki nollia.
   c) Olkoot $x, y \in M$ ja esitetään ne kannassa $\mathbf{e}$ eli muodossa
   $$x = \sum_{i=1} x_i e_i, \ y = \sum_{i=1} y_i e_i.$$
   Merkitään $X$:llä $(n \times 1)$-matriisiä eli *pystyvektoria*
   $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix},$$
   ja samoin $Y$:llä $y$:ta vastaavaa pystyvektoria. Osoita, että
   $$F(x, y) = X^T A Y,$$
   missä $A = [F]_{\mathbf{e}}$ on muodon $F$ matriisi kannassa $\mathbf{e}$

2. Olkoon $n$-ulotteinen $R$-moduli ja $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ sen (eri) kannat. Olkoon $F\colon M \times M \to R$ bilineaarinen muoto. Osoita, että
   $$[F]_{\mathbf{f}} = A^T [F]_{\mathbf{e}} A,$$
   missä $A = [\mathbf{e} \mid \mathbf{f}]$ on kannanvaihtomatriisi.

3. Olkoon $R$ (vaihdannainen) rengas ja $n \in \mathbb{N}$. Määritellään kuvaus $F\colon M(n \times n; R) \to R$ kaavalla
   $$F(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$
   Osoita, että $F$ toteuttaa kaikki determinanttikuvauksen ehdot, eli on multilineaarinen alternoiva muoto sarakkeiden suhteen ja $F(I_n) = 1$.

4. Olkoon $M$ $n$-ulotteinen $R$-moduli ja $\mathbf{e}$ jokin sen kanta. Osoita, että $(n \times n)$-neliömatriisi $A \in M(n \times n; R)$ on kääntyvä jos ja vain jos on olemassa $M$:n kanta $\mathbf{f}$ siten, että $A$ on kannanvaihtomatriisi $[\mathbf{f} \mid \mathbf{e}]$.

5. Olkoon $\mathcal{D}$ avaruuden

$$P_n = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ on polynomi, jonka aste on korkeintaan } n-1\}$$

derivaatta-operaattori, $\mathcal{D}(p) = p'$. Olkoon $0 < k < n$ ja olkoon $W$ jokin aliavaruuden $P_k$ komplementti $P_n$:ssä (eli $P_n = P_k \oplus W$). Osoita, että $W$ ei ole invariantti $\mathcal{D}$:n suhteen. (Vihje: osoita ensin, että $W$ sisältää ainakin yhden polynomin, jonka aste on tasan $k$).

6. Tarkastellaan (ääretönulotteisen) $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $V = C^\infty = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f^{(n)}(x) \text{ on olemassa kaikilla } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ derivaatta-operaattoria $\mathcal{D}\colon V \to V$. Osoita, että jokainen reaaliluku $\lambda \in \mathbb{R}$ on sen ominaisarvo ja vastaava ominaisvektoriavaruus $V_\lambda$ on 1-ulotteinen vektoriavaruus, jonka (eräs) virittäjä on funktio $x \mapsto e^{\lambda x}$.
Ääretönulotteisen vektoriavaruuden operaattorin ominaisvektori/arvo/aliavaruus määritellään samalla tavalla kuin äärellisulotteisessa avaruudessa.
(Vihje: joudut siis ratkaisemmaan differentiaaliyhtälön $f' = \lambda f$. Oleta, että $f$ toteuttaa sen ja laske funktion $x \mapsto \frac{f(x)}{e^{\lambda x}}$ derivaatta suoraan.)

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.