Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 6.

1. Olkoon R rengas. Tarkastellaan äärellistä jonoa

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} \dots \longrightarrow A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots \xrightarrow{f_{p-1}} A_p, \tag{1}$$

missä A_i on R-moduli jokaisella $i = 0, \dots, p-1, p$ ja $f_i \colon A_i \to A_{i+1}$ R-lineaarinen kuvaus jokaisella $i = 0, \dots, p-1$. Sanomme, että jono (1) on *eksakti jono*, jos $\operatorname{Im} f_k = \operatorname{Ker} f_{k+1}$ kaikilla $k = 0, \dots, p-2$.
Eksakti jono, joka on muotoa

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0, \tag{2}$$

on *lyhyt eksakti* jono. Tässä siis 0 on triviaali R-moduli $\{0\}$ ja kuvaukset $0 \to N$, $P \to 0$ ainoa mahdolliset lineaarikuvaukset eli nollakuvaukset.
a) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että $\mathbb{Z}$-modulien jono

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0,$$

missä $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = nx$ ja $g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $g(x) = \bar{x}$, on lyhyt eksakti jono.
b) Olkoon N R-modulin M alimoduli. Osoita, että jono

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \longrightarrow 0, \tag{3}$$

on lyhyt eksakti. Tässä $i \colon N \to M$ on inkluusio ja $p \colon M \to M/N$ on kanoninen projektio.
c) Olkoon jono (1) eksakti. Osoita, että kaikilla $i = 1, \dots, p-2$ jono

$$0 \longrightarrow A_i / \operatorname{Im} f_{i-1} \xrightarrow{\bar{f}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \operatorname{Im} A_{i+1} \longrightarrow 0,$$

on eksakti. Tässä $\bar{f}$ on f:n indusoima kuvaus (perustele miksi on olemassa). Miten väite pitää tulkita tapauksessa $i = 0$ että se olisi tosi?

2. a) Tarkastellaan R-modulien ja R-lineaaristen kuvausten muodostamaa jonoa, joka on muotoa

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0.$$

Osoita, että tämä jono on (lyhyt) eksakti jos ja vain jos seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa.
(i) f on injektio,
(ii) g on surjektio,
(iii) $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$.
b) Osoita, että jokainen lyhyt eksakti jono on "olennaisesti" muotoa (3). Täsmällisemmin olkoon

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

lyhyt eksakti. Osoita, että on olemassa kommutoiva diagrammi

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M/N' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

missä $N' = \operatorname{Im} f$ M:n alimoduli ja kaikki pystykuvaukset ovat isomorfismeja, keskimmäinen jopa identtinen kuvaus.

3. a)Olkoot M ja N $\mathbb{R}$-modulit. Osoita, että jonot

(4)
$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_2} M \oplus N \xrightarrow{pr_1} M \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_1} M \oplus N \xrightarrow{pr_2} N \longrightarrow 0$$

ovat lyhyt eksaksit.
b) Sanomme, että lyhyt eksakti jono

(5)
$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

halkeaa (engl. splits) jos se on "olennaisesti muotoa " (4). Täsmällisesti se tarkoittaa sitä, että on olemassa R-isomorfismi $\phi\colon M \overset{\cong}{\to} N \oplus P$ siten, että diagrammi

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "\phi"] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "i_1"'] & & P \arrow[r] & 0. \\
 & & N \oplus P \arrow[ur, "pr_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

kommutoi.
Jono siis halkeaa jos keskimmäinen moduli hajoaa reunamodulien suoraksi summaksi (teknisellä tasolla vaaditaan vähän enemmän, mutta se on se idea).
Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä eksaktille jonolle (5).

(i) Jono halkeaa.

(ii) Surjektiolla $g\colon M \to P$ on "oikeanpuoleinen käänteiskuvaus" eli on olemassa R-lineaarinen $g'\colon P \to M$ jolle $g \circ g' = \mathrm{id}_P$.

(iii) Injektiolla $f\colon N \to M$ on "vasemmanpuoleinen käänteiskuvaus" eli on olemassa R-lineaarinen $f'\colon M \to N$ jolle $f' \circ f = \mathrm{id}_N$.

c) Olkoon $n \geq 1$. Osoita, että lyhyt eksakti jono

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0,$$

jossa $f(x) = nx$ ja $g(x) = \bar{x}$, ei ole halkeava kolmella eri tavalla:

(i) Osoita, että kuvauksella $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ ei ole oikeanpuoleista $\mathbb{Z}$-lineaarista käänteiskuvausta.

(ii) Osoita, että kuvauksella $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ei ole vasemmanpuoleista $\mathbb{Z}$-lineaarista käänteiskuvausta.

(iii) Osoita, että $\mathbb{Z}$ ei voi olla isomorfinen suoran summan $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ kanssa.

4. R-moduli P on *projektiivinen* jos seuraava ehto toteuttuu.
Olkoot M, N mielivaltaiset R-modulit ja oletetaan, että on annettu R-lineaariset kuvaukset $h\colon P \to N, g\colon M \to N$, missä g on surjektio. Tällöin on olemassa R-lineaarinen kuvaus $f\colon P \to M$ siten, että $g \circ f = h$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[d, "h"] \\ M \arrow[r, "g"] & N. \end{tikzcd}$$

a) Olkoon P vapaa R-moduli. Osoita, että P on projektiivinen.
b) Olkoon P jonkun vapaan R-modulin M suora tekijä (eli $M = P \oplus N$ jollakin alimodulilla N). Osoita, että P on projektiivinen.
c) Olkoon P projektiivinen moduli ja $g\colon M \to P$ surjektiivinen R-lineaarinen kuvaus. Osoita, että g:llä on ”oikeanpuoleinen käänteiskuvaus” eli on olemassa R-lineaarinen $g'\colon P \to M$ jolle $g \circ g' = \mathrm{id}_P$.
Päättele tästä, että jokainen lyhyt eksakti jono

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0,$$

jossa kolmas moduli P on projektiivinen, halkeaa.

5. a) Olkoon M mielivaltainen R-moduli. Osoita, että on olemassa R-lineaarinen surjektio $g\colon P \to M$, missä moduli P on vapaa.
b) Olkoon P projektiivinen moduli. Päättele a)-kohdan ja edellisen tehtävän avulla, että (isomorfiaa vaille) P on jonkun vapaan modulin suora tekijä.
c) Olkoon P R-moduli. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

(i) Moduli P on projektiivinen.

(ii) Jokainen lyhyt eksakti jono

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0,$$

halkeaa.

(iii) P on (isomorfiaa vaille) jonkun vapaan modulin suora tekijä.

(iv) Jokaisella surjektiolla $g\colon M \to P$ surjektiivinen R-lineaarinen kuvaus on olemassa ”oikeanpuoleinen käänteiskuvaus” eli on olemassa R-lineaarinen $g'\colon P \to M$ jolle $g \circ g' = \mathrm{id}_P$.

6. Tarkastellaan Abelin ryhmää $\mathbb{Z}_2$. Jokaiselle sen alkiolle x pätee $4x = 6x = 0$, joten $\mathbb{Z}_2$:n on luonnollisella tavalla sekä $\mathbb{Z}_4$- että $\mathbb{Z}_6$-moduli (vrt. Esim. 2.6.2). Osoita, että $\mathbb{Z}_4$-modulina $\mathbb{Z}_2$ ei ole projektiivinen, mutta $\mathbb{Z}_6$ modulina - on.

Osoita, että itse asiassa Z_2 on (isomorfiaa vaille) $\mathbb{Z}_6$:n suora tekijä, ja löydä joku konkrettinen komplementti N siten että $Z_6 = \mathbb{Z}_2 \oplus N$.

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.