Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 5.

1. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja
$$P_n = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \textit{ on polynomi } \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p\textit{:n aste korkeintaan } n-1\}.$$
a) Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Osoita, että $\mathbf{e} = (1, t-\lambda, (t-\lambda)^2, \ldots, (t-\lambda)^{n-1})$ on P_n:n kanta. Tässä $(t-\lambda)^k$ on luonnollisesti kuvaus, joka kuvaa $t \in \mathbb{R}$ alkioksi $(t-\lambda)^k$. (Vihje: rittää tarkastella tapaus $\lambda = 0$, miksi?)
b) Jokaisella $k = 0, \ldots, n-1$ määritelemme kuvauksen $L_k\colon P_n \to \mathbb{R}$ kaavalla
$$f \mapsto \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}.$$
Osoita, että $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ on $\mathbf{e}$:n duaali-kanta.
Tässä $f^{(k)}$ on siis f:n k's derivaatta-funktio, missä nollas derivaatta on funktio itse.

2. Olkoon $(e_1, \ldots, e_m)$ äärellisulotteisen R-modulin M kanta ja olkoon $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$ sen duaali-kanta. Osoita, että kaikilla $x \in M$ pätee
$$x = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j(x) e_j.$$
Mikä tulos saadaan kun sovelletaan tämä havainto edellisen tehtävän tilanteeseen?

3. Olkoon M äärelosulotteinen R-moduli ja olkoon $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ sen kanta. Tämän kannan duaali-kanta merkitään kuten yleensä $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m\}$.
Voimme muodostaa isomorfismin $L = L_{\mathbf{e}}\colon M \to M^*$ jolle $L(e_i) = \varepsilon^i$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$.
a) Osoita esimerk(e)illä, että L ei yleensä ole "kanoninen" eli voi hyvinkin rippua kannan valinnasta. Yritä keksiä mahdollisimman yleispäteviä esimerkkejä.
b)Olkoon $\Phi\colon M \to M^{**}$ kanoninen kuvaus, $\Phi(m)(L) = L(m)$.
Osoita, että Φ kuvaa kannan $\{\mathbf{e}\}$ duaali-kannansa duaali-kannaksi. Huomaa, että tämähän todistaa samalla Proposition 2.56 "isomorfia"-väitteen yleisen renkaan tapauksessa.

4. Olkoon R (vaihdannainen ykkösellinen) rengas ja $A = (a_{ij})_{i,j=\ldots,n} \in M(n \times n; R)$. Määritellään neliömatriisin A *jälki* (engl. *trace*) $tr(A)$ kaavalla
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
a) Osoita, että kuvaus $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ on duaali-avaruuden $M(n \times n; R)^*$ alkio.
b) Olkoon $A \in M(n \times m; R)$ ja $B \in M(m \times n; R)$. Osoita, että $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Päättele, että jos neliömatriisit X ja Y ovat similaariset, niin $\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(Y)$.
c) Olkoon M m-ulotteinen R-moduli ja olkoon $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ sen kanta. Olkoon $L\colon M \to M$ lineaarinen endomorfismi. Määritellään L:n jälki kaavalla

$\operatorname{tr} L = \operatorname{tr}[L]_{\mathbf{e}}$. Osoita, että määritelmä ei riipu kannan valinnasta ja tr on duaali-avaruuden $L(M)^*$ alkio.

5. Olkoon K kunta ja $L\colon M(n\times n;K)\to K$ lineaarinen kuvaus (eli duaali-avaruuden $M(n\times n;K)^*$ alkio). Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen matriisi $A\in M(n\times n;K)$ siten, että $L(X)=\operatorname{tr}(AX)$ kaikilla $X\in M(n\times n;K)$ kahdella eri tavalla seuraavien ohjeiden mukaan.
   (i) Merkitään L_A:llä kuvausta $X\mapsto \operatorname{tr}(AX)$. Osoita, että kuvaus $A\mapsto L_A$ on lineaarinen injektio $M(n\times n;K)\to M(n\times n;K)^*$. Päättele väite tästä.

   (ii) Osoita, että kuvaus $A\mapsto L_A$ kuvaa $M(n\times n;K)$:n standardikanta erään kannan duaali-kannaksi. Päättele väite tästä. (Vihje: laske $L_{e_{ij}}(e_{kl})$).

   Näistä kahdesta todistustavoista toinen toimii sellaisenaan jos K korvataan (vaihdannaisella ja ykkösellisellä) renkaalla R, toinen taas ei toimi. Kumpi on kumpi ja miksi?

6. Osoita Proposition 2.54 väite todeksi:
   Olkoot M, N R-modulit $\Phi_M\colon M\to M^{**}$, $\Phi_N\colon N\to N^{**}$ kanoniset kuvaukset. Olkoon $L\colon M\to N$ R-lineaarinen. Osoita, että
   $$L^{**}\circ\Phi_M=\Phi_N\circ L,$$
   toisin sanoen diagrammi
   $$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\Phi_M"] & N \arrow[d, "\Phi_N"] \\ M^{**} \arrow[r, "L^{**}"] & N^{**}. \end{tikzcd}$$
   kommutoi.

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.