Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 4.

1. Tarkastellaan $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-modulina.
   a) Osoita, että jokainen $\mathbb{Q}$:n vapaa osajoukko sisältää korkeintaan yhden alkion.
   b) Osoita, että $\mathbb{Q}$ ei ole äärellisviritteinen $\mathbb{Z}$-moduli.
   c) Päättele, että $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa $\mathbb{Z}$-moduli.

2. Olkoon $A = (a_1, \ldots, a_n)$ sidottu jono K-vektoriavaruudessa V. Osoita, että on olemassa indeksi $i \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että
   $$a_i \in \mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_{i-1}),$$
   eli jokin jonon alkio voidaan esittää *edellisten* lineaarisena kombinaationa

3. Olkoon M R-moduli ja $N \leq M$ sen alimoduli. Oletetaan, että sekä N että tekijämoduli M/N ovat vapaita. Osoita, että M on myös vapaa.
   (jos tuntuu vaikealta riittää tarkastella äärellisulotteisten N ja M/N tapaus).

4. Tarkastellaan $\mathbb{C}$-vektoriavaruus $\mathbb{C}^2$. Rajoittamalla skalaarikertolasku alikuntaan $\mathbb{R}$, voimme tarkastella $\mathbb{C}^2$ myös $\mathbb{R}$-vektoriavaruutena.
   a) Osoita, että $\mathbb{C}^2$:n osajoukko $\{(1+i, 2i), (1, 1+i)\}$ on sidottu $\mathbb{C}$:n suhteen, mutta on vapaa $\mathbb{R}$:n suhteen.
   b) Mikä on $\mathbb{C}^2$:n ulottuvuus $\mathbb{R}$-vektoriavaruutena? Konstruoi myös joku konkrettinen $\mathbb{R}$-kanta.

5. Tarkastellaan $\mathbb{R}$-vektoriavaruus $\mathbb{R}^2$.
   a) Olkoon $\mathbf{e} = ((1,0),(0,1))$ standardikanta ja olkoon $\mathbf{f} = ((1,1),(1,-2))$. Osoita, että $\mathbf{f}$ on $\mathbb{R}^2$:n kanta ja muodosta kannanvaihtomatriisit $A = [\mathbf{f} \mid \mathbf{e}]$ ja $B = [\mathbf{e} \mid \mathbf{f}]$. Laske AB ja BA suoran matriisikertolaskun määritelmästä lähtien ja toteaa, että lopputulos on molemmissa tapauksissa yksikkömatriisi.
   b) Määritellään kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kaavalla $L(x) = ix$, missä ajattelemme $x = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ kompleksiluvuna (ja $i = (0,1)$ on imaginääriyksikkö) ja käytämme kompleksilukujen kertolaskua.
   Osoita, että L on $\mathbb{R}$-lineaarinen. Muodosta matriisit $[L]_{\mathbf{e},\mathbf{e}}$, $[L]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}$ ja $[L]_{\mathbf{f},\mathbf{f}}$.
   c) Voimme myös ajatella $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-vektoriavaruutena. Osoita, että b)-kohdassa määritelty kuvaus L on $\mathbb{C}$-lineaarinen. Onko se epiformismi? monomorfismi? isomorfismi? Jos on, mikä on sen käänteiskuvaus? Mikä on sen matriisi $\mathbb{C}$-lineaarisena kuvauksena?

6. Olkoon K *äärellinen* kunta.
   a) Osoita, että K:n jokainen epätriviaali ykkösellinen alirengas on itse asiassa kunta (Vihje: Harj 3/1).
   b) Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{Z} \to K$ kaavalla $f(n) = n \cdot 1$. Osoita tämän kuvauksen ja isomorfialauseen avulla, että K sisältää epätriviaalin alirenkaan K', joka on isomorfinen renkaan $\mathbb{Z}_n$ kanssa jollakin $n \in \mathbb{N}$.
   c) Päättele a)-kohdan avulla, että yllä $n = p$ on alkuluku.
   d) Määrittele K:ssä luonnollinen K'-vektoriavaruuden struktuuri. Päättelee äärellisulotteisten vektoriavaruuksien teorian avulla, että $|K| = p^m$ jollakin $m \in \mathbb{N}$.

Näin ollen äärellisen kunnan koko on aina jonkun alkuluvun potenssi eli esim. ei ole olemassa kuntia joissa on 6 alkiota tai 15 alkiota jne.

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.