Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 11.

1. Olkoon V $\mathbb{R}$-sisätuloavaruus. Osoita
a) Pythagoraan lause: kaikilla $a, b \in V$ pätee
$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2$$
jos ja vain jos $\langle a, b\rangle = 0$.
b) Besselin epäyhtälö: Olkoon $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormaali jono V:ssä. Tällöin kaikilla $x \in V$
$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq |x|^2 .$$
Päätevätkö tulokset $\mathbb{C}$-sisätuloavaruuksissa? Huom! Tässä (ja seuraavassa) tehtävässä emme oleta, että V olisi äärellisulotteinen.

2. Olkoon V K-sisätuloavaruus ja $x, y \in V$. Osoita
a) jos $K = \mathbb{R}$ pätee
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2).$$
b) jos $K = \mathbb{C}$ pätee
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2) + \frac{i}{4}(|x+iy|^2 - |x-iy|^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(|x+y|^2 + i\,|x+iy|^2 - (1+i)(|x|^2 + |y|^2)).$$

3. Olkoon V äärellisulotteinen sisätuloavaruus, $A \subset V$ mielivaltainen osajoukko, $W \subset V$ aliavaruus ja $L\colon V \to V$ lineaarinen operaattori.
a) Osoita, että $A^{\perp}$ on V:n aliavaruus.
b) Osoita, että $(W^{\perp})^{\perp} = W$.
c) Oletetaan, että W on L-invariantti. Osoita, että $W^{\perp}$ on L^*-invariantti. Tässä $L^*\colon V \to V$ L:n adjungaatti.

4. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ kääntyvä matriisi. Osoita, että $A = BC$, missä $B \in M(n \times n; K)$ on unitaarinen ja $C \in\in M(n \times n; K)$ yläkolmiomatriisi. (Vihje: Gram-Schmidt).

5. Palauta mieleen koulusta tuttu *kosinilause* - jos a, b, c ovat tason kolmion sivut, niin
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$
missä α on sivujen a ja b välinen kulma. Osaatko todistaa sen? Kuviin saa (ja pitää) vedota. ”Välinen kulma” määritellään tietysti intuitiivisesti geometriaan vedoten.
Tarkastellaan pistetulo $\cdot$ $\mathbb{R}^2$:ssä. Osoita kosininlauseen mukaan, että kahden nollasta eroavan vektorin v, w välinen kulma saadaan kaavalla
$$\cos\alpha = \frac{v \cdot w}{|v||w|}.$$
Miksi sama tulos on geometrisesti yhtä järkevä myös $\mathbb{R}^n$:ssä kun $n > 2$?

6. Määritellään K-vektoriavaruudessa $M(n \times n; K)$ sisätulo $\langle , \rangle$ kaavalla
$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^*),$$
missä tr on matriisin jälki, joka oli määritelty Harjoitustehtävässä 5.4.
Osoita, että tämä todellakin on sisätulo. Mikä on matriisin $A \in M(n \times n; K)$ normi tämän sisätulon suhteen? Onko standardikanta E_{ij} ortonormaali tämän sisätulon suhteen?
Päättele tämän sisätulon ja adjungaattien teorian avulla uudestaan Harjoitustehtävän 5.5. väite kun $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.