Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 9.

1. Olkoon $L\colon V \to V$ äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden operaattori ja olkoon $v \in V$.
a) Osoita, että
$$I = \{p \in K[X] \mid p(L)(v) = 0\}$$
on epätriviaali ideaali. Merkitään sen pääpolynomi-virittäjä $m_{L,v}$:ksi ja sanotaan L:n minimipolynomiksi v:n suhteen.
b) Totea, että $m_{L,v}$ on m_L:n tekijä.
c) Olkoon $n = \deg m_{L,v}$. Osoita, että jono $(v, Lv, \ldots, L^{n-1}v)$ on vapaa. Olkoon W sen virittämä aliavaruus. Osoita, että W on L-invariantti ja
$$W = \{p(L)(v) \mid p \in K[X]\}.$$
d) Miltä rajoittuman $L|W\colon W \to W$ matriisi kannan $(L^{n-1}v, \ldots, Lv, v)$ suhteen näyttää?

2. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kuvaus, jonka matriis standardikannan $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ suhteen on
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$
Olkoon $v = e_1 - e_2$.
Laske $m_{L,v}$ ja muodosta sen avulla vapaa jono $(v, Lv, \ldots, L^{n-1}v)$, missä $n = \deg m_{L,v}$. Täydennä tämä kanta tarvittaessa koko avaruuden kannaksi $\mathbf{f}$ ja esitä L matriisina tässä kannassa.

3. Olkoon $L\colon V \to V$ äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden operaattori. Kirjoitetaan sen karakteristinen polynomi χ_L muodossa
$$\chi_L = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k},$$
missä $p_1, \ldots, p_k$ ovat erilaiset jaottomat pääpolynomit.
Merkitään jokaisella $i = 1, \ldots, k$
$$W_i = \{x \in V \mid p_i^m(L)(x) = 0 \text{ jollakin } m \in \mathbb{N}\}.$$
Osoita, että
a) Jokainen W_i on L-invariantti aliavaruus.
b) Aliavaruudet $W_1, \ldots, W_k$ muodostavat suoran summan ja
$$\oplus_{i=1}^k W_i = V.$$
c) Rajoittuman $L|W_i \to W_i$ karakteristinen polynomi on $p_i^{n_i}$ ja minimipolynomi muotoa p_i^t, $t \in \mathbb{N}$.

4. Olkoot $L, L'\colon V \to V$ äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden operaattorit. Oletetaan, että ne kommutoivat keskenään eli $LL' = L'L$. Olkoon λ jokin L:n ominaisarvo. Osoita, että ominaisarvoaliavaruus
$$V_\lambda = \{v \in V \mid L(v) = \lambda v\}$$
on L'-invariantti.

5. Olkoon K algebrallisesti suljettu kunta ja V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus. Osoita, että jokainen operaattori $L\colon V \to V$ voidaan kirjoittaa muodossa $L = S + N$, missä $S\colon V \to V$ diagonalisoituva, N nilpotentti ja $SN = NS$, lisäksi tällainen esitys on yksikäsitteinen.
   (Vihje: Jordanin Lause ja siihen liittyvät tulokset. Aloita soveltamalla edellinen tehtävä S:n ominaisarvoihin).

6. Esitä jokainen alla annettu matriisi Jordanin normaalissa muodossa.
   a)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
   b)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
   c)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
   d)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
   Mitkä näistä ovat diagonaalisoituvia?
   (Vihje: alota laskemalla karakteristinen ja minimi-polynomit. Vrt. Harj. 10 teht. 3).

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.