## 4.3 Normaalit operaattorit ja diagonalisointi

Tässä luvussa palataan diagonaalisointi-onglemaan – tällä kertaa varustettuna uudella työkalulla eli sisätulolla.
Olkoon $V$ äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja $L\colon V \to V$ operaattori. Sanomme, että $L$ on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa, jos on olemassa $V$:n ortonormaali kanta $\mathbf{e}$ joka koostuu $L$:n ominaisarvoista.
Sanomme, että $K$-kertoiminen $(n \times n)$-matriisi on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa, jos sitä vastaava lineaarinen kuvaus $L_A\colon K^n \to K^n$ on diagonalisoituva jossakin $K^n$:n ortonormaalissa kannassa (missä $K^n$ varustetaan standardilla pistetulollaan).

**Lemma 4.28.** *Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori äärellisulotteisessa sisätuloavaruudessa, olkoon $\mathbf{e}$ jokin $V$:n ortonormaali kanta ja olkoon $A \in M(n \times n; K)$ mielivaltainen neliömatriisi. Tällöin*
*1) L on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa jos ja vain jos sen matriisi $[L]_{\mathbf{e}}$ ortnormaalissa kannassa $\mathbf{e}$ on diagonalisoituva jossakin $V$:n ortnormaalissa kannassa $\mathbf{f}$.*
*2) $A$ on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa jos ja vain jos $A = UDU^{-1} = UDU^*$ jollakin unitaarisella matriisilla $U \in M(n \times n; K)$ ja diagonaalimatriisilla $D \in M(n \times N; K)$.*

*Todistus.* Harjoitustehtävä (vrt. Lemma 3.5). □

Olkoon $L\colon V \to V$ diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa $\mathbf{e}$. Tällöin matriisi $D = [L]_{\mathbf{e}}$ on diagonaalimatriisi eli muotoa

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Koska kanta on ortonormaali $L$:n adjungaatin $L^*$ matriisi saman kannan suhteen on $D^*$ eli diagonaalimatriisi

$$D^* = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \overline{\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Koska diagonaalimatriisit selvästi kommutoivat keskenään, näemme, että $LL^* = L^*L$. Tämä havainto motivoi seuraavan määritelmän.

**Määritelmä 4.29.** *Lineaarinen operaattori $L\colon V \to V$, missä $V$ on äärellisulotteinen sisätuloavaruus on normaali , jos $LL^* = L^*L$. Matriisi $A$ on normaali jos $AA^* = A^*A$.*

Seuraavat normaalien operaattorien ominaisuudet ovat keskeisiä niiden teorian kannalta.

**Lemma 4.30.** *Olkoon $L\colon V \to V$, missä $V$ on äärellisulotteinen sisätuloavaruus. Tällöin $L$ on normaali jos ja vain jos kaikilla $v \in V$ pätee*

$$|L(v)| = |L^*(v)|.$$

*Todistus.* Osoitetaan, että jokainen normaali kuvaus toteuttaa ehdon. Käänteistä väitettä emme tarvitse, joten sen todistus jää harjoitustehtäväksi. Olkoon $L$ normaali. Jokaisella $v \in V$ pätee

$$|L(v)|^2 = \langle L(v), L(v)\rangle = \langle v, L^*L(v)\rangle =$$

$$\langle v, LL^*(v)\rangle = \langle L^*v, L^*(v)\rangle = |L^*(v)|^2.$$

□

Kun $V$ on sisätuloavaruus ja $W \subset V$ mikä tahansa sen aliavaruus, $W$ voidaan ajatella sisätuloavaruutena luonnollisena tavalla - varustetaan se $V$:n sisätulon $\langle,\rangle$ rajoittumalla joukkoon $W \times W$. Helposti nähdään, että tällöin $W$ todellakin on sisätuloavaruus.

**Propositio 4.31.** *Olkoon $L\colon V \to V$, missä $V$ on äärellisulotteinen sisätuloavaruus, normaali operaattori. Olkoon $W \subset V$ $L$-invariantti aliavaruus. Tällöin sen ortogonaalinen komplementti $W^\perp$ on myös $L$-invariantti.*

*Todistus.* Valitaan $W$:lle ortonormaali kanta $(e_1, \dots, e_k)$ ja $W^\perp$:lle ortonormaali kanta $(e_{k+1}, \dots, e_n)$. Tämä on mahdollista Lemman 4.14 nojalla. Lisäksi Lemman 4.15 nojalla $W \oplus W^\perp = V$, joten kun nämä kannat ydistetään, saadaan koko avaruuden $V$ ortonormaali kanta $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$. Esitetään $L$ matriisina tässä kannassa. Koska $W$ on $L$-invariantti, tämä matriisi voidaan kirjoittaa lohkomatriisina

$$[L]_\mathbf{e} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C, \end{bmatrix},$$

missä $A$ on rajoittuman $L|W\colon W \to W$ matriisi kannassa $(e_1, \dots, e_k)$ Koska aliavaruuden $W^\perp$ kannan vektorien kuvat ovat tämän matriisin viimeiset sarakkeet $A^{k+1}, \dots, A^n$, riittää osoittaa, että $B = 0$.

Koska kanta $\mathbf{e}$ on ortonormaali, adjungaatin $L^*$ matriisi samassa kannassa on

$$[L^*]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & C^*, \end{bmatrix}.$$

Olkoon $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$. Tällöin

$$L(e_l) = \sum_{i=1}^{k} a_{il} e_i,$$

$l = 1, \dots, k$. Koska jono $(e_1, \dots, e_k)$ on ortonormaali, saadaan

$$|L(e_l)|^2 = \sum_{i=1}^{k} |a_{il}|^2,$$

mistä seuraa, että

$$\sum_{l=1}^{k} |L(e_l)|^2 = \sum_{i,l=1}^{k} |a_{il}|^2 = a,$$

missä $a$ on siis matriisin $A$ alkioiden itseisarvojen neliöiden summa.
Lasketaan samanlainen summa $L^*$:lle. Nyt jokaisella $i = 1, \dots, k$ pätee

$$L^*(e_l) = \sum_{i=1}^{k} \overline{a_{li}} e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \overline{b_{li}} e_i,$$

sillä $L^*$:n matriisi on $L$:n matriisin transpoosin konjugaatti.
Koska jono $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ on ortonormaali, pätee

$$|L^*(e_l)| = \sum_{i=1}^{n} |\overline{a_{li}}|^2 + \sum_{i=k+1}^{n} abs\overline{b_{li}}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} absa_{li}^2 + \sum_{i=k+1}^{n} |b_{li}|^2,$$

koska kompleksiluvun konjugaatin itseisarvo on sama kuin luvun itseisarvo.
Nyt

$$\sum_{l=1}^{k} |L^*(e_l)| = \sum_{i,l=1}^{k} |a_{li}|^2 + \sum_{i=k+1,l=1}^{n} |b_{li}|^2 = a + b,$$

missä $a$ on edelleenkin matriisin $A$ alkioiden itseisarvojen neliöiden summa ja $b$ matriisin $B$ alkioiden itseisarvojen neliöiden summa.
Toisaalta Lemman 4.30 nojalla jokaisella $l = 1, \dots, k$ pätee

$$|L^*(e_l)| = |L(e_l)|,$$

joten kun nämä lasketaan yhteen, saadaan $a = a + b$. Näin ollen $b = 0$. Toisaalta $b$ on summa ei-negatiivisista luvuista, joten jokainen näistä luvuista on nolla. Koska jokainen $B$:n matriisin alkion itseisarvon neliö esiintyy tässä summassa, joten $B$ on nolla-matriisi. Väite on todistettu. □

**Seuraus 4.32.** *Olkoon $L\colon V \to V$ normaali operaattori äärellisulotteisessa sisätuloavaruudessa $V$ ja olkoon $W \subset V$ $L$-invariantti aliavaruus. Tällöin rajoittuma $L|W\colon W \to W$ on myös normaali.*

*Todistus.* Osoitetaan, että $W$ on myös $L^*$-invariantti. Tämä seuraa edellisestä tuloksesta ja yleisestä tuloksesta, jonka mukaan jos $U$ on $L$-invariantti, niin $U^\perp$ on $L^*$-invariantti. Tämä pätee kaikille $L$ ja sen todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. Kun sovelletaan tämä tulos avaruuteen $U = W^\perp$, joka on $L$-invariantti edellisen proposition mukaan, saadaan, että $L^*$ on $U^\perp$-invariantti. Mutta $U^\perp = (W^\perp)^\perp = W$ (harjoitustehtävä), joten olemme todistaneet, että $W$ on $L^*$-invariantti.
$L' = L^*|W\colon W \to W$ on siis hyvin määritelty lineaarinen kuvaus. Koska kaikilla $v, w \in W$ adjungaatin määritelmän mukaan pätee

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L'w\rangle,$$

kuvaus $L'$ on määritelmän mukaan $L|W$:n adjungaatti. Siis

$$(L|W)^* = L^*|W.$$

Koska $LL^* = L^*L$ pätee koko $V$:ssä, se pätee erityisesti $W$:ssä, joten $L|W$ on normaali. □

Olemme näyttäneet aikaisemmin, että jokainen ortonormaalissa kannassa diagonalisoituva operaattori on normaali. Käänteinen väite pätee ainoastaan $\mathbb{C}$-kertoimisissa sisätuloavaruuksissa.

**Propositio 4.33.** *Olkoon $V$ $\mathbb{C}$-kertoiminen sisätuloavaruus. Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

1. *$L$ on normaali.*
2. *$L$ on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa.*

*Todistus.* Riittää todistaa, että jokainen normaali operaattori on diagonalisoituva ortonormaalisessa kannassa.
Todistetaan tämä induktiolla $n = \dim V$:n suhteen. Tapaus $n = 1$ on triviaali.

Koska $\mathbb{C}$ on algebrallisesti suljettu, $L$:llä on ominaisvektori $e_1$ (tämä on todistuksen ainoa osa joka ei mene läpi $\mathbb{R}$:ssä). Tämän ominaisvektorin virittämä aliavaruus $U = \mathrm{Span}(e_1)$ on $L$-invariantti, joten $W = U^\perp$ on myös $L$-invariantti. Lisäksi $L|W\colon W \to W$ on normaali. Koska $\dim W = \dim V - 1$. voimme induktioletuksen perusteella valita $W$:ssä ortonormaali kanta $(e_2, \ldots, e_n)$, joka koostuu $L$:n ominaisvektoreista. Koska jono $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ on $V$:n ortonormaali kanta, joka koostuu $L$:n ominaisvektoreista, väite on todistettu. □

Olkoon $V$ äärellisulotteinen $K$-sisätuloavaruus (missä $K$ on $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$ kuten yleensä). Olkoon $L\colon V \to V$ unitaarinen kuvaus. Tällöin $L^* = L^{-1}$ ja koska $LL^{-1} = I_n = L^{-1}L$, operaattori $L$ on normaali. Samoin jokainen unitaarinen matriisi on normaali.
Soveltamalla edellinen proposition tähän havaintoon saamme todistettua puolet seuraavasta tuloksesta.

**Seuraus 4.34.** *Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori, missä $V$ on äärellisulotteinen $\mathbb{C}$-sisätuloavaruus. Tällöin $L$ on unitaarinen jos ja vain jos $L$ on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa ja kaikki sen ominaisavot $z \in \mathbb{C}$ toteuttavat ehdon*
$$|z| = 1.$$
*Samoin matriisi $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ on unitaarinen jos ja vain jos $A = UDU^{-1} = UDU^*$ jollakin $U \in U(n)$ ja kompleksisella diagonaalimatriisilla*
$$D = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & z_n \end{bmatrix},$$
*jonka kaikki diagonaalialkiot toteuttavat ehdon $|z_i| = 1$.*

*Todistus.* Kaikki väitteet ovat samojen väitteiden kuvaus/matriisi tulkinnat, joten riittää osoittaa jokainen väite vain kerran kuvaukselle tai matriisille. Tiedämme jo, että jokainen unitaarinen operaattori $L\colon V \to V$ on normaali, joten jos tarkastellaan se $\mathbb{C}$-n suhteen, se on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa. Osoitetaan, että $L$:n jokainen ominaisarvo on itseisarvoltaan 1. Tämä itse asiassa pätee myös $\mathbb{R}$-suhteen. Olkoot $z \in \mathbb{C}, v \in V$ siten, että $L(v) = zv$. Koska $L$ säilyttää normit saadaan
$$|v| = |L(v)| = |zv| = |z|\,|v|,$$
ja koska $|v| \neq 0$, voimme supistaa sen ja saamme $|z| = 1$, kuten pitikin.

Kääntäen olkoon $D$ diagonaalinen matriisi

$$\begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & z_n \end{bmatrix},$$

jossa kaikki diagonaalialkiot toteuttavat ehdon $|z_i| = 1$. Tällöin $\overline{z_i} = z_i^{-1}$ jokaisellaa $i = 1, \dots, n$ ja

$$D^* = \begin{bmatrix} \overline{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{z_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \overline{z_n} \end{bmatrix},$$

joten $DD^* = I_n$ eli $D$ on unitaarinen. $\square$

Edellinen propositio ja siten myös Propositio 4.33 eivät päde $\mathbb{R}$-sisätuloavaruudessa. Esimerkiksi ortogonaalinen $2 \times 2$-matriisi

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ei ole diagonalisoituva $\mathbb{R}$:n suhteen kun $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq n\pi$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$ (kts. esim. 4.27.

Tutkitaan tarkemmin normaaleja $\mathbb{R}$-kertoimisia $2 \times 2$-matriiseja.

Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & d \end{bmatrix}$$

mielivaltainen $M(2 \times 2; \mathbb{R})$:n alkio. Tällöin

$$A^* = A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & d \end{bmatrix}.$$

Jos $A$ on normaali Lemman 4.30 nojalla erityisesti

$$a^2 + b^2 = |A(e_1)|^2 = \left|A^T(e_1)\right|^2 = a^2 + c^2,$$

mistä seuraa $b^2 = c^2$ eli $b = \pm c$. Jos $b = c$, matriisi $A$ on *symmetrinen* eli sille pätee $A^T = A$. Tällainen reaalinen matriisi on selvästi normaali (jokainen matriisi kommutoi itseensä kanssa).

Toinen mahdollisuus on $b = -c$. Tällöin

$$A^T A = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & -ab + bd \\ -ab + bd & d^2 - b^2 \end{bmatrix} \text{ ja}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ab-bd \\ ab-bd & d^2-b^2 \end{bmatrix}.$$

Näistä kaavoista nähdään, että $A$ on normaali jos ja vain jos $b(a-d)=0$ eli $b=0$ tai $a=d$. Jos $b=0$ matriisi on taas symmetrinen. Muuten matriisi on muotoa

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Tämä on samannäköinen kuin esitys, joka johdettiin esimerkissä 4.27 ortogonaalisille matriiseille, paitsi, että emme vaadi tässä, että $a^2+b^2=1$.
Mutta jos merkitään $r = a^2+b^2$ ja oletetaan, että $r>0$ (muuten matriisi on nollamatriisi, erityisesti symmetrinen), nähdään, että $A = rO$, missä $O \in SO(2)$. Kääntäen tällainen matriisi on selvästi normaali. Olemme todistaneet seuraavan tuloksen.

**Lemma 4.35.** *Matriisi $A \in M(2\times 2;\mathbb{R})$ on normaali jos ja vain jos se on symmetrinen matriisi tai on muotoa $A = rO$, missä $r>0$ ja $O \in SO(2)$.*

Tämän tuloksen avulla voimme johtaa hajotelma-tuloksen normaaleille operaattoreille $\mathbb{R}$-sisätuloavaruuksissa. Sitä ennen tarvitsemme lisää aputuloksia.
Yllä tarkasteltu reaalinen $(2\times 2)$ symmetrinen matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

on aina diagonalisoituva, mikä nähdään helposti laskemalla sen ominaisarvot (harjotustehtävä). Tämä ei ole mikään sattuma - osoittautuu, että jokainen symmetrinen $\mathbb{R}$-kertoiminen matriisi on diagonalisoituva $\mathbb{R}$:n suhteen.

**Määritelmä 4.36.** *Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori äärellisulotteisessa $K$-sisätuloavaruudessa. Tällöin sanomme, että $L$ on* itseadjungoitu *jos $L^* = L$. Samoin matriisi $A \in M(n\times n;K)$ on itseadjungoitu jos $A^* = A$.*

Kuten yleensä, operaattori on itseadjungoitu jos ja vai jos sen matriisi ortonormaalin kannan suhteen on itseadjungoitu matriisi. Kun $K=\mathbb{R}$ puhutaan symmetrisista operaattoreista ja matriiseista.
Neliömatriisi $A=(a_{ij})$ on itseadjungoitu jos ja vain jos $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ kaikilla $i,j$. Erityisesti tällaisen matriisin diagonaaliarvot ovat aina reaalisia, $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$.

**Propositio 4.37.** *Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori äärellisulotteisessa $K$-sisätuloavaruudessa, missä $K=\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Tällöin $L$ on itseadjungoitu jos ja vain jos se on diagonalisoituva ortonormaalisessa kannassa ja kaikki sen ominaisarvot ovat reaalisia.*

*Erityisesi matriisi $A \in M(n \times n; K)$ on itseadjungoitu jos ja vain jos $A = XDX^{-1}$, missä $X$ on unitaarinen ja $D$ diagonaalinen matriisi, jonka kaikki alkiot ovat reaalisia.*

*Todistus.* Olkoon $L$ operaattori, joka voidaan esittää jossakin ortonormaalissa kannassa diagonaalisena matriisina

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

,jonka kaikki alkiot reaalisia. Tällöin selvästi $D^* = D$, joten $L$ on itseadjungoitu.
Käänteisen suunnan todistamisessa pitää tarkastella erikseen reaalinen ja kompleksinen tapaus.
Tarkastellaan ensin yksinkertaisempi tapaus $K = \mathbb{C}$. Koska itseadjungoitu operaattori $L$ on selvästi normaali, Proposition 4.33 nojalla se on myös diagonalisoituva ortogonaalisessa kannassa. Jos $D$ on diagonaalimatriisi, joka esittää $L$ jossakin ortonormaalissa kannassa, niin $D$ on itseadjungoitu. Erityisesti jokainen sen diagonaalin alkio on reaalinen, joten sama pätee $L$:n ominaisarvoihin.
Olkoon sitten $K = \mathbb{R}$. Osoitetaan, että jokaisella symmetrisella $\mathbb{R}$-kertoimisella matriisilla on ainakin yksi reaalinen ominaisarvo. Koska $A$ on reaaliluku-kertoiminen, se voidaan yhtä hyvin ajatella kompleksiluku-kertoimisena. Voidaan siis ajatella $A$ lineaarisena kuvauksena $L_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Huomaa, että tämän kuvauksen matriisi $\mathbb{C}^n$:n standardissa ortonormaalisessa kannassa $\mathbf{e}$ on juuri matriisi $A$. Tässä siis ajattelemme $\mathbb{C}^n$ sisätuloavaruutena standardin pistetulon suhteen. Koska $A$ on itseadjungoitu, myös kuvaus $L_A$ on itseadjungoitu. Koska nyt se on itseadjungoitu kuvaus $\mathbb{C}$-vektoriavaruudessa, sillä on ominaisarvo $r$, joka on reaaliluku juuri todistetun nojalla. Olkoon $z = (z_1, \dots, z_n)$ vastaava ominaisvektori. Jokainen $\mathbb{C}^n$ alkio voidaan kirjoittaa yksikäsitteisellä tavalla muodossa $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tässä siis samastetaan $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{C}^n$:n alkio $(x_1, \dots, x_n)$.
Koska ominaisvektori $z \neq 0$ ainakin toinen vektoreista $x, y$ on myös nollasta eroava. Lisäksi

$$A(x) + iA(y) = L_A(x + iy) = L_A(z) = rz = rx + iry,$$

mistä seuraa, että $A(x) = rx$ ja $A(y) = ry$. Koska ainakin toinen on nollasta eroava, $r$ on $A$:n ominaisarvo. □

Kun $K = \mathbb{R}$ niin tietysti lisäys "jokainen ominaisarvo on reaalinen" on tarpeeton ja olemme todistaneet seuraavan tuloksen - äärellisulotteisen $\mathbb{R}$-sisätuloavaruuden operaattori on diagonalisoituva jossakin ortonormaalissa kannassa jos ja vain jos se on symmetrinen.
Seuraava tulos ei varsinaisesti kuulu sisätuloavaruuksien teoriaan, vaan pikemminkin yleiseen invarianttialiavaruuksien teoriaan, joten olisimme voineet todistaa sen aikaisemmin, Luvussa 3. Toisaalta tämä on ensimmäinen kerta kun tarvitsemme sen.

**Lemma 4.38.** *Olkoon $V$ äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja olkoon $L\colon V \to V$ sen operaattori. Tällöin $V$:llä on $L$-invariantti aliavaruus $W$, jonka dimension on* 1 *tai* 2.

*Todistus.* Riittää osoittaa, että väite pätee kun $L = L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, missä $A$ on jokin $(n \times n)$ reaaliluku-kertoiminen matriisi.
Käytämme samaa temppua kuin edellisen proposition todistuksessa. Ajatellaan $A$ kompleksiluku-kertoimisena matriisina, jolloin se määrittelee kuvauksen $L_A^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Koska jokainen $\mathbb{C}^n$:n alkio voidaan yksikäsitteisellä tavalla kirjoittaa muodossa $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}^n$, helposti nähdään, että $L_A^{\mathbb{C}}(z) = L_A(x) + iL_A(y) = Ax + iAy$ (tarkista!).
Koska $\mathbb{C}$ on algebrallisesti suljettu, $L_A^{\mathbb{C}}$:llä on ominaisarvo $\lambda = \lambda_1 + ilambda_2$. Olkoon $z = x + iy$ vastaava ominaisarvo. Tällöin ainakin toinen vektoreista $x, y$ on nollasta eroava, joten $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus $W = \mathrm{Span}(x, y)$ on 1- tai 2-dimensionaalinen. Osoitetaan, että se on $A$-invariantti. Koska $z$ on $\lambda$-ominaisvektori, pätee

$$A(x) + iA(y) = A(z) = \lambda z = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x + iy) = (\lambda_1 x - \lambda_2 y) + i(\lambda_1 y + \lambda_2 x),$$

joten $A(x) = \lambda_1 x - \lambda_2 y \in W$ ja $A(y) = \lambda_1 y + \lambda_2 x \in W$. Koska jokainen $W$: alkio on $x$:n ja $y$:n lineaarinen kombinaatio, tästä seuraa, että $W$ on $A$-invariantti. □

**Propositio 4.39.** *Olkoon $V$ $\mathbb{R}$-sisätuloavaruus ja $L\colon V \to V$ operaattori. Tällöin $L$ on normaali jos ja vain jos seuraavat ehdot toteutuu.*
*On olemassa $V$:n $L$-invariantit aliavaruudet $W, V_1, \ldots, V_m$ siten, että*

- *Aliavaruudet $W, V_1, \ldots, V_m$ ovat pareittain kohtisuorassa toisiaan vastaan, eli jos $x, y$ ovat erilaisista aliavaruuksista $W, V_1, \ldots, V_m$, pätee $\langle x, y \rangle = 0$,*
- *$L|W$ on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa,*
- $\dim V_i = 2$ *kaikilla $i = 1, \ldots, m$,*

- *$L|V_i$ on muotoa $rO$, missä $r > 0$ ja $O$ on kaksiulotteisen aliavaruuden $W_i$ ortogonaalinen operaattori, jolla ei ole ominaisarvoja eli esitettävissä kiertona*
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$$
*jossakin $V_i$:n ortonormaalissa kannassa (ja $\det O = 1$).*

*Todistus.* Jos kuvaus $L$ toteuttaa nämä ehdot, niin sen rajoittuma jokaiseen aliavaruuteen $W, V_1, \ldots, V_n$ on selvästi normaali. Koska aliavaruudet kyseessä ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, helposti nähdään tästä, että $L$ on normaali (mieti yksityiskohdat läpi).
Olkoon kääntäen $L$ normaali. Olkoon $W$ sen kaikkien ominaisvektorien virittämä aliavaruus. Olkoot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ kaikki $L$:n ominaisarvot. Osoitetaan että vastaavat ominaisarvoaliavaruudet $V_{\lambda_i}$ ovat kohtisuorassa toistensa kohden. Olkoot $\lambda, \mu$ erilaiset ominaisarvot. Voidaan osoittaa, että koska $L$ on normaali, $\overline{\mu}$ on $L^*$:n ominaisarvo (harj. tehtävä). Olkoot $v, w \in V$ siten, että $L(v) = \lambda v$, $L(w) = \mu w$. Tällöin

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle Lv, w\rangle =$$

$$= \langle v, L^* w\rangle = \langle v, \overline{\mu} w = \mu\langle v, w\rangle.$$

Koska $\lambda \neq \mu$, saadaan $\langle v, w\rangle = 0$, mitä pitikin todistaa.
Nyt jos valitaan jokaisessa ominaisarvoaliavaruudessa $V_{\lambda_i}$ jokin ortonormaali kanta ja yhdistetään ne, saadaan ortonormaali kanta $W$:lle. Lisäksi tämän kannan alkiot ovat kaikki $L$:n ominaisarvot. Näin ollen $L|W \colon W \to W$ on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa.
Proposition 4.31 nojalla aliavaruus $W^\perp$ on $L$-invariantt ja Korollaarin 4.32 nojalla rajoittuma $L|W^\perp \colon W^\perp \to W^\perp$ on myös normaali operaattori. Lisäksi rajoittumalla $L|W^\perp$ ei ole ominaisarvoja, sillä muuten ne olisi $L$:n ominaisarvoja ja kuuluisivat siis $W$:hen, mikä on mahdotonta, sillä $W \cap W^\perp = \{0\}$.
Riittää siis näyttää vielä, että jos $L \colon V \to V$ on normaali operaattori, jolla ei ole ominaisarvoja, niin $V$ on suora summa 2-ulotteisista $L$-invarianteista aliavaruuksista $W_1, \ldots, W_n$, jotka ovat lisäksi kohtisuorassa toisia nähden. Nimittäin tällöin Korollaarin 4.32 nojalla $L|W_i$ on kaksiulotteisen $\mathbb{R}$-sisätuloavaruuden normaali operaattori ja esimerkkeissä yllä nähtiin jo, että tällainen operaattori on joko symmetrinen tai muotoa $rO$ missä $r = 0$ ja $O$ on ortogonaalinen (ja lisäksi $\det O = 1$). Mutta symmetrinen se tässä tapauksessa ei voi olla, sillä silloin se olisi myös diagonalisoituva, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $L$:llä ei ole $V$:ssä ominaisarvoja.
Edellisen lemman nojalla $L$:llä on 2-ulotteinen invariantti aliavaruus $W$. Koska $L$ on normaali, myös ortogonaalinen komplementti $W^\perp$ on $L$-invariantti ja

$L|W^{\perp}$ on myös normaali operaattori, jolla ei ole ominaisarvoja. Jatkamalla induktiolla, saadaan osoitettua haluttu väite. $\square$

**Seuraus 4.40.** *Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori, missä $V$ äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-sisätuloavaruus. Tällöin $L$ on ortogonaalinen jos ja vain jos $V$:llä on ortonormaali kanta $\mathbf{e}$, jossa $L$ voidaan esittää lohkomatriisina*

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -I_m & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I_n \end{bmatrix},$$

*missä jokainen $A_k \in SO(2 \times 2; \mathbb{R})$. Lisäksi $\det L = (-1)^m$.*
*Jokainen ortogonaalinen operaattori on siis yhdistelmä peilauksista ja kaksiulotteisista kierroista.*

*Todistus.* Seuraa edellisestä Propositiosta, kunhan huomataan, että ortogonaalisen operaattorin rajoittuma invarianttiin aliavaruuteen on aina ortogonaalinen ja sen ominaisarvot ovat $\pm 1$. $\square$

Erityisesti kolmiulotteisessa avaruudessa saadaan merkittävä tulos, jonka tunsi jo Euler - jokainen etäisyyksiä ja avaruuden orientaation säilyttävä lineaarinen operaattori $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ voidaan esittää ortonormaalissa kannassa muodossa

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eli se on kaksiulotteinen kierto paikallaan pysyvän akselin ympäri. Tässä "orientaation säilyttäminen" tarkoittaa, että $\det L = 1$