Vektorianalyysi
Harjoitus 9
21.-25.11.2011
Ratkaisuehdotuksia (Jr)

1. Millä suoralla sylinterillä, jonka tilavuus on $V > 0$ on pienin vaipan ja pohjien yhteenlaskettu pinta-ala?

Ratkaisu. Kun sylinterin pohjan säde on r ja korkeus on h, on vaipan ja pohjien yhteenlaskettu pinta-ala $a(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ja sylinterin tilavuus $v(r,h) = \pi r^2 h$. Nyt $v(r,h) = V > 0$, jolloin $r > 0$ ja $h = V/\pi r^2$ ja tarkasteltava pinta-ala voidaan esittää muuttujan r funktiona $g(r) = a(r, V/\pi r^2) = 2\pi r^2 + 2V/r$. Nyt $g'(r) = 4\pi r - 2V/r^2 = 0$ jos ja vain jos $r = \sqrt[3]{V/2\pi}$. Kirjoittamalla $g'(r) = 2r(2\pi - V/r^3)$ nähdään, että $g'(r) < 0$ kaikilla $0 < r < \sqrt[3]{V/2\pi}$ ja $g'(r) > 0$ kaikilla $r > \sqrt[3]{V/2\pi}$, joten $r = \sqrt[3]{V/2\pi}$ on funktion g minimikohta. Siis sylinterillä, jonka tilavuus on V, on pienin vaipan ja pohjien yhteenlaskettu pinta-ala, kun pohjan säde on $r = \sqrt[3]{V/2\pi}$ ja korkeus on

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

2. Määritä funktion $f(x,y) = xy$ maksimiarvo joukossa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 2\}$?

Ratkaisu. Joukossa $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 2\}$ pätee $x = 2 - 2y$ ja $f|A$ voidaan näin ollen esittää y:n funktiona

$$g(y) = f(2-2y, y) = (2-2y)y = 2y - 2y^2 = -\left(\sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

missä $y \in \mathbb{R}$. Tästä nähdään suoraan, että g saa pisteessä $y = 1/2$ maksimiarvonsa $g(1/2) = 1/2$, ts. f saa joukossa A pisteessä $(x,y) = (1, 1/2)$ maksimiarvonsa $f(1,1/2) = 1 \cdot 1/2 = 1/2$.

3. Mitkä ovat sen $\mathbb{R}^3$:n suorakulmion mitat, jolla on tilavuus $V > 0$, ja pienin mahdollinen pinta-ala.

Ratkaisu. Olkoot $\mathbb{R}^3$:n suorakulmion (täsmällisemmin: suorakulmaisen särmiön) särmien pituudet x, y, z. Koska tilavuus $V = xyz$ on positiivinen, on oltava $x, y, z > 0$ ja $z = V/xy$. Pinta-ala $A(x,y,z) = 2xy + 2yz + 2xz$ voidaan siis esittää muuttujien x, y funktiona

$$f(x,y) = A(x,y,V/xy) = 2xy + 2V/x + 2V/y, \quad x, y > 0.$$

Selvästi f on $\mathcal{C}^3$-funktio tarkastelualueessa. Selvitetään f:n kriittiset pisteet:

$$\nabla f(x,y) = (2y - 2V/x^2, 2x - 2V/y^2) = 0$$

jos ja vain jos $y = V/x^2$ ja $x = V/y^2$. Kun ensimmäinen yhtälö sijoitetaan jälkimmäiseen, saadaan yhtälö $x = x^4/V$ eli yhtälö $x(1 - x^3/V) = 0$, jolla on tarkastelualueessa ratkaisu $x = \sqrt[3]{V}$. Sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön saadaan $y = \sqrt[3]{V}$, joten $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ on f:n ainoa kriittinen piste. Koska $\partial_{11} f(x, y) = 4V/x^3$, $\partial_{12} f(x, y) = 2$ ja $\partial_{22} f(x, y) = 4V/y^3$, on

$$\begin{vmatrix} \partial_{11} f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) & \partial_{12} f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) \\ \partial_{12} f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) & \partial_{22} f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0.$$

Lisäksi $\partial_{11} f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 4 > 0$, jolloin kriittinen piste $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ on aito lokaali minimipiste, jossa $f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 6\sqrt[3]{V^2}$.

Osoitetaan, että $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ on aito globaali minimipiste. Kun $x \leq \sqrt[3]{V}/3$, on

$$f(x, y) > 2V/x \geq 2V/(\sqrt[3]{V}/3) = 6\sqrt[3]{V^2}.$$

Vastaavasti, kun $y \leq \sqrt[3]{V}/3$, on

$$f(x, y) > 2V/y \geq 2V/(\sqrt[3]{V}/3) = 6\sqrt[3]{V^2}.$$

Ja kun $xy \geq 3\sqrt[3]{V^2}$, on

$$f(x, y) > 2xy \geq 6\sqrt[3]{V^2}.$$

Siis kompaktin joukon

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq \sqrt[3]{V}/3 \text{ ja } xy \leq 3\sqrt[3]{V^2}\}$$

reunan ja komplementin pisteissä (x, y) pätee $f(x, y) > 6\sqrt[3]{V^2}$, mutta sisäpisteessä $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ pätee $f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 6\sqrt[3]{V^2}$, joten jos f saa tarkastelualueensa jossakin pisteessä pienimmän arvonsa, se saa sen D:n sisäpisteessä. Toisaalta f saa kompaktissa joukossa D jatkuvana funktiona pienimmän arvonsa jossakin D:n pisteessä, jonka on siis oltava D:n sisäpiste ja näin ollen kriittinen piste. Siis $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ on ainoana kriittisenä pisteenä aito globaali minimipiste.

Kysytyn suorakulmaisen särmiön särmien pituudet ovat siis $x = y = \sqrt[3]{V}$ ja $z = V/xy = \sqrt[3]{V}$. Kyseessä on näin ollen kuutio.

4. Etsi funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2},$$

suurin ja pienin arvo ylemmässä puolitasossa $y \geq 0$.

Ratkaisu. Selvästi f on $\mathcal{C}^1$-funktio avoimessa ylemmässä puolitasossa $y > 0$. Lasketaan f:n kriittiset pisteet tässä joukossa:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1 - x^2 + y^2 + 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \frac{-1 - x^2 + y^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right) = 0$$

jos ja vain jos $1 - x^2 + y^2 + 2xy = 0$ ja $-1 - x^2 + y^2 - 2xy = 0$. Laskemalla nämä yhtälöt yhteen saadaan $x^2 = y^2$ eli $x = -y$ tai $x = y$, ja sijoittamalla nämä ensimmäiseen yhtälöön saadaan tarkastelualueeseen kuuluva ratkaisu $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Tämä on siis

f:n ainoa kriittinen piste ja näin ollen ainoa mahdollinen ääriarvokohta ylemmässä puolitasossa $y > 0$, ja $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$.

Etsitään mahdolliset ääriarvokohdat suoralla $y = 0$ eli x-akselilla. Nyt funktion

$$g(x) = f(x, 0) = \frac{x}{1 + x^2}$$

derivaatta $g'(x) = (1 - x^2)/(1 + x^2)^2$ on nolla jos ja vain jos $x = -1$ tai $x = 1$. Derivaatan merkistä nähdään, että $x = -1$ on g:n aito lokaali minimipiste ja $x = 1$ on g:n aito lokaali maksimipiste. Lisäksi $f(-1, 0) = g(-1) = -1/2 > -1/\sqrt{2} = f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ja $f(1, 0) = g(1) = 1/2$.

Kun nyt merkitään $x = r\cos\varphi$ ja $y = r\sin\varphi$, missä $0 \leq \varphi \leq \pi$ ja $r \geq 4$, pätee

$$|f(x, y)| < \frac{|x| + y}{x^2 + y^2} \leq \frac{2r}{r^2} = \frac{2}{r} \leq \frac{1}{2}.$$

Siis kompaktin joukon

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4 \text{ ja } y \geq 0\}$$

komplementin pisteissä (x, y) sekä niissä reunan pisteissä (x, y), joissa $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$, pätee $-1/2 < f(x, y) < 1/2$, joten f saa pienimmän ja suurimman arvonsa koko ylemmässä puolitasossa $y \geq 0$ kompaktin joukon D pisteissä $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ja $(1, 0)$ ja nämä arvot ovat $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$ ja $f(1, 0) = 1/2$.

5. Olkoon $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Laske integraali

$$\int_D (x^4 + xy^2)dxdy.$$

Ratkaisu. Koska f on jatkuva D:ssä, integraali voidaan laskea iteroituna integraalina:

$$\int_D (x^4 + xy^2)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^4 + xy^2)dy\right)dx = \int_0^1 \left(\Big/_0^1 (x^4 y + \frac{1}{3}xy^3)dy\right)dx$$
$$= \int_0^1 (x^4 + \frac{1}{3}x)dx = \Big/_0^1 (\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}.$$

6. Olkoon D kuten yllä. Laske integraali

$$\int_D y^3 e^{xy} dxdy.$$

Ratkaisu. Jälleen f on jatkuva D:ssä, jolloin integraali voidaan laskea iteroituna integraalina ja osittaisintegrointia käyttämällä:

$$
\begin{aligned}
\int_D y^3 e^{xy} dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 y^3 e^{xy} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\mathop{\Big/}_{0}^{1} y^2 e^{xy} dx \right) dy = \int_0^1 (y^2 e^y - y^2) dy \\
&= \mathop{\Big/}_{0}^{1} y^2 e^y - \int_0^1 2y e^y dy - \mathop{\Big/}_{0}^{1} \frac{1}{3} y^3 = e - \left(\mathop{\Big/}_{0}^{1} 2y e^y - \int_0^1 2e^y dy \right) - \frac{1}{3} \\
&= e - 2e + \mathop{\Big/}_{0}^{1} 2e^y - \frac{1}{3} = e - 2e + 2e - 2 - \frac{1}{3} = e - 2\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$