Vektorianalyysi
Harjoitus 5
10.-14.10.2011
Ratkaisuehdotuksia (Jr)

Määritä seuraavien kolmen funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kriittiset pisteet, ja mahdollisten lokaalien ääriarvokohtien laatu:

1. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2+x_2^2}$.

Ratkaisu. Nyt

$$\nabla f(x_1,x_2) = (\partial_1 f(x_1,x_2), \partial_2 f(x_1,x_2)) = (2x_1 e^{x_1^2+x_2^2}, 2x_2 e^{x_1^2+x_2^2}) = 0$$

jos ja vain jos $x_1 = x_2 = 0$, joten $(0,0)$ on f:n ainoa kriittinen piste. Lisäksi

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x_1,x_2) & \partial_{12} f(x_1,x_2) \\ \partial_{12} f(x_1,x_2) & \partial_{22} f(x_1,x_2) \end{pmatrix} = e^{x_1^2+x_2^2} \begin{pmatrix} 2+4x_1^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 2+4x_2^2 \end{pmatrix}$$

ja näin ollen

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Koska $\det \nabla^2 f(0,0) = 4 > 0$ ja $\partial_{11} f(0,0) = 2 > 0$, kriittinen piste $(0,0)$ on lokaali minimikohta. (Funktion f lausekkeesta näkee suoraan, että $f(0,0) = 1$ ja $f(x_1,x_2) > 1$ kaikilla $(x_1,x_2) \neq (0,0)$, joten kyseessä on aito globaali minimikohta.)

2. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2-x_2^2}$.

Ratkaisu. Tässäkin tapauksessa

$$\nabla f(x_1,x_2) = (2x_1 e^{x_1^2-x_2^2}, -2x_2 e^{x_1^2-x_2^2}) = 0$$

jos ja vain jos $x_1 = x_2 = 0$, joten $(0,0)$ on f:n ainoa kriittinen piste. Nyt

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = e^{x_1^2-x_2^2} \begin{pmatrix} 2+4x_1^2 & -4x_1x_2 \\ -4x_1x_2 & -2+4x_2^2 \end{pmatrix}$$

ja näin ollen

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Koska $\det \nabla^2 f(0,0) = -4 < 0$, kriittinen piste $(0,0)$ ei ole lokaali ääriarvokohta, vaan ns. satulapiste.

3. $f(x_1, x_2) = x_1^2(1+x_2^2)$.

Ratkaisu. Nyt

$$\nabla f(x_1,x_2) = (2x_1(1+x_2^2), 2x_1^2 x_2) = 0$$

jos ja vain jos $x_1 = 0$ ja $x_2 \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen, joten f:n kriittisiä pisteitä ovat kaikki pisteet $(0, x_2)$, missä $x_2 \in \mathbb{R}$, eli koko x_2-akseli. Koska

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2(1+x_2^2) & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 2x_1^2 \end{pmatrix},$$

on

$$\nabla^2 f(0, x_2) = \begin{pmatrix} 2(1+x_2^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ja näin ollen $\det \nabla^2 f(0, x_2) = 0$ kaikilla $x_2 \in \mathbb{R}$. Siis $\nabla^2 f(0, x_2)$ on semidefiniitti kaikilla $x_2 \in \mathbb{R}$, joten tällä perusteella ei voida sanoa mitään kriittisten pisteiden ääriarvoluonteesta. Toisaalta funktion lausekkeesta nähdään suoraan, että $f(x_1, x_2) \geq 0$ jokaisessa pisteessä $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $f(x_1, x_2) = 0$ jos ja vain jos $x_1 = 0$. Kaikki kriittiset pisteet ovat siis globaaleja minimikohtia, eikä yksikään niistä ole aito.

4. Kuinka neliömuoto

$$q(h) = h_1^2 + 4h_1h_2 + h_2^2, \quad h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2,$$

käyttäytyy origon ympäristössä?

Ratkaisu. Kun kirjoitetaan

$$q(h) = h_1^2 + 4h_1h_2 + h_2^2 = (h_1 + 2h_2)^2 - (\sqrt{3}h_2)^2,$$

nähdään, että $q(h) = 0$ jos ja vain jos $h_1 + 2h_2 = \pm\sqrt{3}h_2$ eli $h_2 = \frac{1}{-2\pm\sqrt{3}}h_1 = (-2 \mp \sqrt{3})h_1$. Nämä kaksi origossa leikkaavaa suoraa jakavat tason $\mathbb{R}^2$ neljään osaan. Niissä kahdessa osassa, joihin koordinaattiakselit kuuluvat, $q(h)$ on positiivinen (tutki arvoja esim. pisteissä $(1, 0,)$ ja $(-1, 0)$), kun taas jäljelle jäävissä kahdessa osassa $q(h)$ on negatiivinen (tutki arvoja esim. pisteissä $(1, -1,)$ ja $(-1, 1)$). Neliömuoto q on siis indefiniitti ja origo ns. satulapiste.

5. Olkoon $q(h) = \langle Ah, h \rangle$ symmetrisen matriisin A määräämä positiividefiniitti neliömuoto tasossa $\mathbb{R}^2$. Osoita, että se on alhaalta rajoitettu, eli että on olemassa vakio $C > 0$ siten että $q(h) \geq C\|h\|^2, h \in \mathbb{R}^2$.

Ratkaisu. Olkoon $h \neq 0$ ja $k = h/\|h\|$. Tällöin $\|k\| = 1$ eli k on yksikköympyrän $S = \{k \in \mathbb{R}^2 \mid \|k\| = 1\}$ piste. Sisätulon ominaisuuksista seuraa, että

$$q(h) = \langle Ah, h \rangle = \|h\|^2 \langle Ak, k \rangle = \|h\|^2 q(k).$$

Koska q on jatkuva yksikköympyrällä S ja S on epätyhjä sekä suljettu ja rajoitettu eli kompakti $\mathbb{R}^2$:n osajoukko, niin q saa S:ssä pienimmän arvonsa jollakin $k_0 \in S$ (ks. lause 2.9.17. Martion kirjassa). Koska lisäksi q on positiividefiniitti, on kaikilla $k \in S$ voimassa $q(k) \geq q(k_0) > 0$. Siis

$$q(h) = \|h\|^2 q(k) \geq q(k_0)\|h\|^2.$$

Tämä epäyhtälö pätee myös, kun $h = 0$.

Toinen ratkaisu. Luentomuistiinpanojen sivujen 58-59 nojalla A:n diagonaalihajotelman $A = U^t \Lambda U$ avulla voidaan kaikilla $h \in \mathbb{R}^2$ kirjoittaa

$$q(h) = \langle \Lambda h', h' \rangle = \lambda_1 {h'}_1^2 + \lambda_2 {h'}_2^2,$$

missä diagonaalimatriisin Λ lävistäjäalkiot λ_1 ja λ_2 ovat A:n ominaisarvot ja $h' = Uh$. Koska A on positiividefiniitti, ovat $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ja näin ollen myös $\min\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$, ja saadaan

$$q(h) \geq \min\{\lambda_1, \lambda_2\}({h'}_1^2 + {h'}_2^2) = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}\|h'\|^2.$$

Koska $U^t = U^{-1}$, on toisaalta

$$\|h'\|^2 = {h'}^t h' = (Uh)^t Uh = h^t U^t U h = h^t h = \|h\|^2.$$

Siis

$$q(h) \geq \min\{\lambda_1, \lambda_2\}\|h\|^2$$

kaikilla $h \in \mathbb{R}^2$.

6. Oletetaan, että funktion $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ Hessen matriisi $\nabla^2 f(x_0)$ kriittisessä pisteessä x_0 on indefiniitti. Osoita, että f:llä ei ole lokaalia ääriarvokohtaa pisteessä x_0.

Ratkaisu. Merkitään $q(h) = \langle \nabla^2 f(x_0)h, h \rangle$. Kun $h \neq 0$ ja $k = h/\|h\|$, funktion f Taylorin kehitelmä pisteessä x_0 voidaan kirjoittaa näin:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2}q(h) + \|h\|^3 R(h) = f(x_0) + \frac{1}{2}\|h\|^2 \left(q(k) + 2\|h\|R(h)\right),$$

missä $R(h)$ on rajoitettu jossakin origon ympäristössä. Koska $\nabla^2 f(x_0)$ on indefiniitti, on olemassa sellaiset pisteet $h', h'' \neq 0$, joille $q(h') < 0$ ja $q(h'') > 0$. Olkoot $k' = h'/\|h'\|$ ja $k'' = h''/\|h''\|$, jolloin myös $q(k') = \|h'\|^{-2}q(h') < 0$ ja $q(k'') = \|h''\|^{-2}q(h'') > 0$. Koska $R(h)$ on rajoitettu jossakin origon ympäristössä, on olemassa sellainen $r > 0$, että

$$|2\|h\|R(h)| = 2\|h\|\,|R(h)| < \min\{-q(k'), q(k'')\}$$

kaikilla h, joilla $\|h\| < r$. Nyt kaikilla $0 < s < r$ ja $h = sk'$ on $\|h\| = s$ ja $h/\|h\| = k'$, jolloin

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2}\|h\|^2 \left(q(k') + 2\|h\|R(h)\right) < f(x_0).$$

Vastaavasti kaikilla $0 < s < r$ ja $h = sk''$ on $\|h\| = s$ ja $h/\|h\| = k''$, jolloin

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2}\|h\|^2 \left(q(k'') + 2\|h\|R(h)\right) > f(x_0).$$

Siis f:llä ei ole lokaalia ääriarvokohtaa pisteessä x_0.