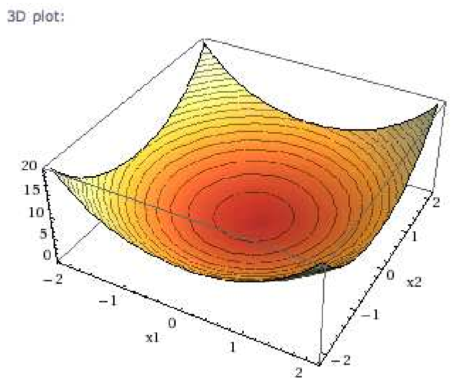
Vektorianalyysi
Harjoitus 2
19.-23.9.2011
Ratkaisuehdotuksia (Jr)

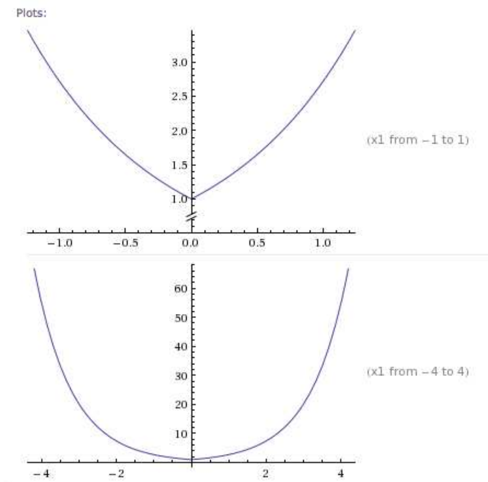
1. Olkoon

$$f(x) = e^{\|x\|}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Luonnostele f:n kuvaaja. Mitä voit sanoa funktion f arvoista joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \ln 2)$?

Ratkaisu. Alla vasemmanpuoleisessa kuvassa näkyvät kuvaajan käyrät ovat origokeskisten ympyröiden kuvia kuvauksessa f ja funktion f tasa-arvokäyriä. Oikeanpuoleisessa kuvassa on f:n kuvaaja tapauksessa $x_2 = 0$. Funktion f kuvaaja saadaan pyörähdyspintana pyöräyttämällä tämä käyrä pystyakselin ympäri.





Koska

$$\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \ln 2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \geq \ln 2\},$$

f saa joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \ln 2)$ kaikki arvot, jotka ovat $\geq e^{\ln 2} = 2$. Jos nimittäin $y \geq 2$, niin $e^{\|x\|} = y$ jos ja vain jos $\|x\| = \ln y$ jos ja vain jos x on origokeskisen $\ln y$ -säteisen ympyrän piste.

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{2x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2^2}{x_1^4 + x_2^2}.$$

Osoita, että funktiolla f ei ole raja-arvoa origossa.

Ratkaisu. Valitaan ensin

$$u_i = (1/i, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

jolloin $u_i \to 0$ ja

$$f(u_i) = f(1/i, 0) = \frac{2 \cdot 1/i^2 \cdot 0 + 1/i^2 \cdot 0^2}{1/i^4 + 0^2} = 0 \to 0.$$

Valitaan sitten

$$v_i = (1/i, 1/i^2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

jolloin $v_i \to 0$ ja

$$f(v_i) = f(1/i, 1/i^2) = \frac{2 \cdot 1/i^2 \cdot 1/i^2 + 1/i^2 \cdot 1/i^4}{1/i^4 + 1/i^4} = \frac{2 + 1/i^2}{2} \to 1.$$

Koska löydettiin jonot, joilla funktiolla f on eri raja-arvot origossa, voidaan päätellä, että f:llä ei ole raja-arvoa origossa.

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Mitä tarkoitetaan, kun sanotaan, että f:llä on raja-arvo pitkin jokaista origon kautta kulkevaa suoraa? Onko edellisen tehtävän funktiolla tämä ominaisuus?

Ratkaisu. Funktiolla f on origossa raja-arvo a pitkin origon kautta kulkevaa suoraa l, jos jokaisella jonolla (y_i), jolla $y_i \in l$, $y_i \neq 0$ ja $y_i \to 0$, pätee $f(y_i) \to a$.

Olkoon nyt f edellisen tehtävän funktio. Koska x_2-akselilla on $x_1 = 0$ ja näin ollen

$$f(x_1, x_2) = f(0, x_2) = \frac{2 \cdot 0^2 \cdot x_2 + 0^2 \cdot x_2^2}{0^4 + x_2^2} = 0$$

kaikilla $x_2 \neq 0$, funktiolla f on origossa raja-arvo 0 pitkin x_2-akselia. Vastaavasti on x_1-akselilla

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, 0) = \frac{2x_1^2 \cdot 0 + x_1^2 \cdot 0^2}{x_1^4 + 0^2} = 0$$

kaikilla $x_1 \neq 0$, joten funktiolla f on origossa raja-arvo 0 myös pitkin x_1-akselia. Olkoon sitten l suora $x_2 = kx_1$, missä $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ja olkoon (y_i) jono, jolla $y_i \in l$, $y_i \neq 0$ ja $y_i \to 0$. Tällöin

$$y_i = (y_{1,i}, ky_{1,i}),$$

missä $y_{1,i} \to 0$, ja

$$f(y_i) = f(y_{1,i}, ky_{1,i}) = \frac{2y_{1,i}^2 ky_{1,i} + y_{1,i}^2 (ky_{1,i})^2}{y_{1,i}^4 + (ky_{1,i})^2} = \frac{2ky_{1,i} + (ky_{1,i})^2}{y_{1,i}^2 + k^2} \to \frac{0}{k^2} = 0.$$

Siis funktiolla f on origossa raja-arvo 0 pitkin jokaista origon kautta kulkevaa suoraa.

4. Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Onko g:llä raja-arvoa origossa?

Ratkaisu. Ei ole. Jos esimerkiksi

$$u_i = (1/i, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad v_i = (0, 1/i) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

niin $u_i, v_i \to 0$, mutta

$$\begin{aligned} g(u_i) &= g(1/i, 0) = \frac{1/i^2 - 0^2}{1/i^2 + 0^2} = 1 \to 1, \\ g(v_i) &= g(0, 1/i) = \frac{0 - 1/i^2}{0^2 + 1/i^2} = -1 \to -1. \end{aligned}$$

5. Muodosta funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \sin^2(x_1) + \cos^2(x_2)$, osittaisderivaatat $\partial_1 f$ ja $\partial_2 f$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x_1, x_2) &= 2\sin(x_1)\cos(x_1) = \sin(2x_1), \\ \partial_2 f(x_1, x_2) &= -2\cos(x_2)\sin(x_2) = -\sin(2x_2). \end{aligned}$$

6. Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolla $\partial_1 f(x_1, x_2) = 0$ kaikilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, mutta joka ei ole jatkuva.

Ratkaisu. Olkoon

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x_2 \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{kun } x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tällöin kaikilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Lisäksi f ei ole jatkuva missään pisteessä $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, koska sillä ei ole edes raja-arvoa missään pisteessä $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Tämä nähdään seuraavasti. Olkoon $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Valitaan kaikilla $i = 1, 2, \ldots$ sellaiset $u_i \in \mathbb{Q}$ ja $v_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, että $u_i \to x_2$ ja $v_i \to x_2$. Tällaiset jonot voidaan valita, koska jokaisen reaaliluvun jokaisessa ympäristössä on sekä rationaalisia että irrationaalisia lukuja. Nyt

$$(x_1, u_i) \to (x_1, x_2), \quad (x_1, v_i) \to (x_1, x_2)$$

ja

$$f(x_1, u_i) = 0 \to 0, \quad f(x_1, v_i) = 1 \to 1.$$

Siis funktiolla f ei ole raja-arvoa ja näin ollen f ei ole jatkuva pisteessä $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.