Vektorianalyysi
Harjoitus 11
5.-9.12.2011
Ratkaisuehdotuksia (Jr)

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko ja $\partial\Omega$ sen reuna. Määrittelemme Ω:n tilavuuden asettamalla

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx$$

ja sen reunan alan kaavalla

$$\mathrm{area}(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1\, dS(x)$$

mikäli vain integraalit ovat olemassa. Tarvitsemme näitä merkintöjä tehtävissä 5 ja 6. Tässä siis $dx = dx_1 \cdots dx_n$.

1. Olkoon A sylinteri $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq h\}$. Laske integraali

$$\int_A z(x^2 + y^2)\, dxdydz.$$

Ratkaisu. Käyttämällä napakoordinaattisijoitusta $(x, y) = w(s, \varphi) = (s\cos\varphi, s\sin\varphi)$, missä $0 \leq s \leq r$ ja $0 \leq \varphi < 2\pi$, saadaan $x^2 + y^2 = s^2$ ja $|\det w'(s, \varphi)| = s$, jolloin

$$\begin{aligned}
\int_A z(x^2 + y^2)\, dxdydz &= \int_0^h z\ dz \iint_{\bar{B}(0,r)} (x^2 + y^2)\, dxdy \\
&= \frac{1}{2}h^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r (s^2 \cdot s)\, ds \\
&= \frac{1}{2}h^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}r^4 = \frac{\pi}{4}h^2r^4.
\end{aligned}$$

2. Lue ensin Martion kirjasta esimerkki 5.2.2, jossa käsitellään napakoordinaatit $\mathbb{R}^3$:ssa. Laske tämän jälkeen integraali

$$\int_A \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz,$$

kun A on rengasalue $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2\}$.

Ratkaisu. Nyt integroitava funktio

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

on jatkuva $\bar{A}$:ssa, joten esimerkin 5.2.2 mukaisella muuttujanvaihdolla $(x, y, z) = w(r, \varphi, \theta) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$, missä $R_1 < r < R_2$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ja $0 \leq \varphi < 2\pi$, saadaan

$$\begin{aligned}
\int_A f(x, y, z)\, dxdydz &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(w(r, \varphi, \theta))|\tau(w)(r, \varphi, \theta)|\, d\varphi d\theta dr \\
&= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin^2\theta}{r^2} r^2 \sin\theta\, d\varphi d\theta dr \\
&= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^2\, dr \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta) \sin\theta\, d\theta \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3) \int_0^{\pi} (\sin\theta - \cos^2\theta \sin\theta)\, d\theta \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3) \Big[(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big]_0^{\pi} \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3) \cdot \frac{4}{3} \\
&= \frac{8\pi}{9}(R_2^3 - R_1^3).
\end{aligned}$$

3. Olkoon γ tason käyrä, jolla on esitys $\gamma(x) = (x, x^2)$, $|x| \leq 1$. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{y}{x}\, ds.$$

Ratkaisu. Integroitava funktio $f(x, y) = y/x$ ei ole määritelty käyrän pisteessä $(0, 0)$, mutta sillä on tässä pisteessä raja-arvo pitkin käyrää γ:

$$f(\gamma(x)) = f(x, x^2) = \frac{x^2}{x} = x \to 0,$$

kun $x \to 0$. Kun määritellään $f(0, 0) = 0$, on $f|\gamma([-1, 1])$ jatkuva ja

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x, y)\, ds &= \int_{-1}^{1} f(\gamma(x)) \sqrt{\gamma_1'(x)^2 + \gamma_2'(x)^2}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \Big[\frac{1}{12}(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-1}^{1} = 0.
\end{aligned}$$

4. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Laske integraali

$$\int_A \partial_y f\, dxdy,$$

kun $f(x, y) = x^2 y^2$.

Ratkaisu.

$$\int_A \partial_y f \, dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \partial_y f \, dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \Big[f(x,y) \Big]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{15}.$$

Toinen ratkaisu. Käytetään Greenin kaavaa (eli Martion kirjan lausetta 6.2.1). Funktio $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (F_1,(x,y), F_2(x,y)) = (-f(x,y), 0)$, on $\mathcal{C}^1$-vektorikenttä, jolle $\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = \partial_y f$. Reuna ∂A koostuu kahdesta säännöllisestä positiivisesti suunnistetusta $\mathcal{C}^1$-polusta $\gamma_1\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$, ja $\gamma_2\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (t,0)$. Koska ∂A on nollamittainen, saadaan nyt Greenin kaavan avulla

$$\int_A \partial_y f \, dxdy = \int_A (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dxdy = \int_{\mathrm{int}(A)} (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dxdy$$
$$= \oint_{\partial A} F \cdot d\bar{s} = \int_{\gamma_1} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt + \int_{\gamma_2} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt$$
$$= \int_{-1}^{1} -(-t)^2(1-t^2)(-1)\, dt + \int_{\gamma_2} 0\, dt = \int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)\, dt = \frac{4}{15}.$$

5. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, jolle divergenssi–teoreema on voimassa. Osoita, että

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{n}, x \rangle \; dS(x),$$

missä $\mathbf{n}$ on Ω:n yksikköulkonormaali.

Ratkaisu. Olkoon $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, F(x) = x, jolloin F:n koordinaattifunktioille pätee $F_i(x) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Nyt F on selvästi $\mathcal{C}^1$-vektorikenttä, joten oletuksen mukaan divergenssilause on voimassa. Siis

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx = \frac{1}{n}\int_\Omega n\, dx$$
$$= \frac{1}{n}\int_\Omega (\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ kpl}})\, dx$$
$$= \frac{1}{n}\int_\Omega \big(\partial_1 F_1(x) + \cdots + \partial_n F_n(x)\big)\, dx$$
$$= \frac{1}{n}\int_\Omega (\nabla \cdot F)(x)\, dx$$
$$= \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} (F(x) \cdot \bar{n})\, dS(x)$$
$$= \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{n}, x \rangle\, dS(x).$$

6. Olkoon $B_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ ja $S_{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$. Tässä $r > 0$ ja $n \geq 2$. Osoita, että

$$\mathrm{vol}(B_n(r)) = \frac{r}{n}\,\mathrm{area}(S_{n-1}(r)).$$

Ratkaisu. Nyt $B_n(r)$ on avoin, $\bar{B}_n(r)$ on kompakti ja $\partial B_n(r) = S_{n-1}(r)$ koostuu pintaintegroinnin kannalta nollamittaista joukkoa $\{x \in S_{n-1} : x_n = 0\}$ lukuunottamatta kahdesta erillisestä $\mathcal{C}^1$-pinnasta, joilla on parametriesitykset

$$t(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \pm\sqrt{r^2 - (x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)}\right),$$

missä $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B_{n-1}(r)$, joten divergenssiteoreema on voimassa $B_n(r)$:lle. Lisäksi jokaisessa pisteessä $x \in S_{n-1}(r)$ yksikköulkonormaalille $\mathbf{n}$ pätee $\mathbf{n} = x/\|x\| = x/r$ ja $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = r^2$, joten tehtävän 5 avulla saadaan

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(B_n(r)) &= \frac{1}{n}\int_{S_{n-1}(r)} \langle \mathbf{n}, x\rangle\, dS(x) = \frac{1}{n}\int_{S_{n-1}(r)} \frac{1}{r}\langle x, x\rangle\, dS(x) \\ &= \frac{r}{n}\int_{S_{n-1}(r)} 1\, dS(x) = \frac{r}{n}\,\mathrm{area}(S_{n-1}(r)).\end{aligned}$$