VEKTORIANALYYSI I

S. 2011, P. Ola
2011

1. Euklidinen avaruus

1.1. $\mathbb{R}^n$:n struktuuri

Jos $n \in \{1,2,3,\dots\}$, niin $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) ; x_i \in \mathbb{R}\}$ on n-ulotteinen euklidinen avaruus.

Kuten Lin. algebran kursseilla on nähty, on $\mathbb{R}^n$ vektoriavaruus, kun summa määritellään

$$x+y = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n), \quad \begin{cases} x=(x_1,\dots,x_n) \\ y=(y_1,\dots,y_n) \end{cases}$$

ja $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Merkitään $0 = (0,\dots,0)$ (nollavektori)

Kun $n=1$: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ = reaaliakseli, reaalilukujen joukko

$n=2$: $\mathbb{R}^2$ = taso

$n=3$: $\mathbb{R}^3$ = 3-ulotteinen euklidinen avaruus.

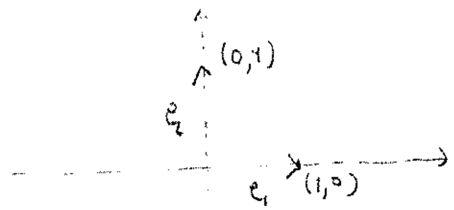
Olkoon

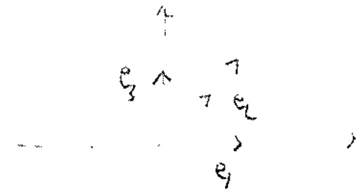
$$e_1 = (1,0,\dots,0)$$
$$e_i = (0,\dots,\overset{(i)}{1},0,\dots,0)$$
$$e_n = (0,\dots,1)$$

$\mathbb{R}^n$:n standardikanta. Tällöin

$$x = (x_1,\dots,x_n) = x_1e_1+\dots+x_ne_n$$

; luvut x_i ovat x:n koordinaatit, standardikannan suhteen.





$\mathbb{R}^n$:n vektorien x ja y välinen pistetulo on

$$x \cdot y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n \quad (= \langle x,y \rangle \text{ joskus})$$

Huom. $\left.\begin{array}{l} x \cdot y = y \cdot x \\ x\cdot(y+z) = x\cdot y + x \cdot z \end{array}\right\}$ Todistus HT

$\mathbb{R}^2$:ssa tunnetusti vektorin $x = (x_1,x_2)$ pituus on

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$\mathbb{R}^3$:ssa vast. $(x = (x_1,x_2,x_3))$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

Määr. 1.1.1. Vektorin $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ pituus (eli normi) on

$$\|x\| = (x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}.$$

Huomaa: Pituus voidaan lausua sisätulon avulla:

$$\|x\|^2 = x_1^2+\dots+x_n^2 = x\cdot x \quad (=\langle x,x\rangle),$$

eli

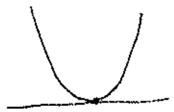
$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}.$$

Lause 1.1.2. (Cauchy–Schwarzin ey)

$$\forall\, x,y\in\mathbb{R}^n,\quad |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|.$$

Tod. Olk. $x,y\in\mathbb{R}^n$ kiinteitä; jok. $t\in\mathbb{R}$ määr. funktio (voimme ol. että $x,y\neq 0$)

$$\varphi(t) = \langle x+ty,\, x+ty\rangle$$



$$= \langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + t^2\langle y,y\rangle$$

Nyt φ:n kuvaaja on paraabeli, joka aukeaa ylöspäin, ja koska $\varphi(t)\ge 0\ \forall t$, on sillä korkeintaan yksi nollakohta. Näin ollen diskriminantille D pätee

$$0 \ge D = (2\langle x,y\rangle)^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$
$$= 4|\langle x,y\rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2,$$

eli

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|.\ \square$$

Nyt näemme helposti, että etäisyydellä on seuraavat perusominaisuudet:

(N1) $\|x\|\ge 0\ \forall x$ ja $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Tod: $\|x\| = (x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2} \ge 0$, ja $\|x\| = 0 \iff x_1^2+\dots+x_n^2 = 0$
$\iff x_1 = \dots = x_n = 0.\ \square$

(N2): $\forall\, \alpha\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n$,

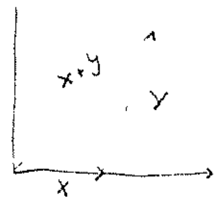
$$\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|.$$

Tod: $\|\alpha x\| = ((\alpha x_1)^2+\dots+(\alpha x_n)^2)^{1/2} = |\alpha|(x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$
$= |\alpha|\,\|x\|.\ \square$

ja tärkeä

(N3) (Δ-ey) $\forall\, x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$



Tod.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \underbrace{\langle x,x\rangle}_{=\|x\|^2} + \underbrace{2\langle x,y\rangle}_{\le 2\|x\|\|y\|} + \underbrace{\langle y,y\rangle}_{=\|y\|^2}$$
$$\overset{C\text{-}S}{\le} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2.\ \square$$

Olemme itse asiassa nyt os. että $\mathbb{R}^n$ on ns. normiavaruus; sillä on (luonnollinen) vektoreiden yhteenlasku ja skalaarikertonta, ja se on varustettu normilla. Tämä normi on itse asiassa sisätulon määräämä.

1.2. Jonojen konvergenssi

Jonojen konvergenssin määritelmä on muodollisesti täysin samanlainen kuin reaalilukujonoille:

Määr. 1.2.1. Olkoon $(x^i)_{i=1}^{\infty}$ jono $\mathbb{R}^n$:n vektoreita:

$$x^i = (x^i_1, \dots, x^i_n) \quad (\text{eli } x^i_k \text{ on } x^i\text{:n } k\text{:s koordinaatti})$$

Vektori x^0 on jonon (x^i) raja-arvo, merk.

$$x^0 = \lim_{i\to\infty} x^i,$$

jos

$$\|x^i - x^0\| \to 0, \text{ kun } i \to \infty.$$

Esim. 1.2.2. i) $x^i = (1 + 1/i,\ 1/i)$.

Nyt helposti arvataan

$$\lim x^i = (1,0).$$

Os. tämä: olk. $x^0 = (1,0)$. Nyt

$$\|x^i - x^0\|^2 = (1 + 1/i - 1)^2 + (1/i)^2$$

$$= 1/i^2 + 1/i^2 = 2i^{-2} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

ii) $x^i = \left(e^{-(1+i)^2},\ 1,\ (i^2+1)^{-1}\right)$.

Helppo huomata, että (HT)

$$\lim x^i = (0, 1, 1).$$

Itse asiassa raja-arvon voi aina laskea suoraan koordinaattien raja-arvoina:

$$\lim x^i = x^0 \iff \lim x^i_k = x^0_k \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

$\mathbb{R}^n$:n jono

$\mathbb{R}$:n jonojen konvergenssi.

Periaate: Raja-arvot lasketaan koordinaateittain $\rightsquigarrow$ palautuu reaalilukujonojen raja-arvoihin! ∇

1.3. $\mathbb{R}^n$:n joukoista

Tutustumme kolmeen topologiseen käsitteeseen: avoimiin, suljettuihin ja kompakteihin joukkoihin

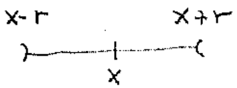
Aloitetaan avoimista palloista:

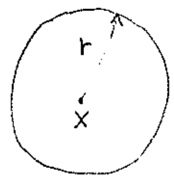
Joukko $(x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0)$

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n ;\ \|y - x\| < r\}$$

on avoin x-keskinen, r-säteinen pallo (tai kuula); kun $n = 2$, puhumme kiekoista.

Kun $n = 1$, tämä on vain avoin väli $(x-r, x+r)$





Vastaavasti

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n ;\ \|y - x\| \le r\}$$

on suljettu x-keskinen r-säteinen pallo (tai kuula) kiekko etc.

Lopuksi, pallon $B(x,r)$ reuna on joukko 7.

$$\partial B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n ;\ \|x-y\| = r\}$$

Käytämme myös merkintää $S(x,r) = \partial B(x,r)$.

Siirrymme nyt yleisiin $\mathbb{R}^n$:n joukkoihin:

Määr. 1.3.1. Joukko $F \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu, jos seuraava pätee: olkoon (x^i) jono, $x^i \in F\ \forall i$, s.e. $\lim x^i = x^0$. Tällöin $x^0 \in F$.

Sanomme: "F sisältää kaikki rajapisteensä".

Kysymys: Onko suljettu pallo $\bar{B}(x,r)$ suljettu myös y.o. määritelmän mielessä?

Vast: On; olkoon nimittäin $\lim y^i = x^0$, ja $\|y^i - x\| \le r\ \ \forall i$. Tällöin Δ-ey $\Rightarrow$

$$\|x^0 - x\| \le \|x^0 - y^i\| + \|y^i - x\|.$$

Olk. $\varepsilon > 0$ m.v. $\exists\ i(\varepsilon)$ s.e. $i > i(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\|x^0 - y^i\| < \varepsilon.$$

Tällöin

$$\|x^0 - x\| \le \varepsilon + \|y^i - x\| < \varepsilon + r.$$

Siis $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \|x^0 - x\| < \varepsilon + r \Rightarrow \|x^0 - x\| \le r$, eli rajapiste $x^0 \in \bar{B}(x,r)$.

Mieti, miksi yo argum. ei toimi avoimelle pallolle!

Avoin joukko voidaan määritellä usealla eri tavalla. 8.
Seuraamme Martion monistetta:

Määr. 1.3.2. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, jos sen komplementti $\mathbb{R}^n \setminus A$ on suljettu.

Nyt muutama huomautus on paikallaan:

i) Onko siis avoin pallo $B(x,r)$ avoin y.o. määritelmän mielessä? Vast: ON! Nyt

$$\mathbb{R}^n \setminus B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n ;\ \|y-x\| \ge r\},$$

ja voimme käyttää taas Δ-eytä:

Olk. $\|y^i - x\| \ge r$, ja $\lim y^i = x^0$.

Nyt $\forall i$:

$$r \le \|y^i - x\| \le \|y^i - x^0\| + \|x^0 - x\|$$

$\Leftrightarrow\ \ r - \|y^i - x^0\| \le \|x^0 - x\|\ \forall i$. Valitsemalla taas i s.e. $\|y^i - x^0\| < \varepsilon$, saamme

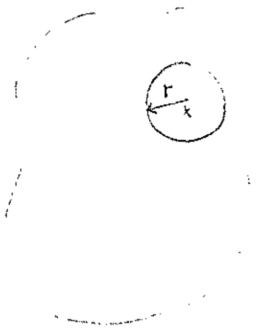
$$\|x^0 - x\| \ge r - \varepsilon\ \ \forall\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \|x^0 - x\| \ge r,$$

ja siis $\mathbb{R}^n \setminus B(x,r)$ on suljettu $\Leftrightarrow B(x,r)$ on avoin.

ii) Määritelmän nojalla koko $\mathbb{R}^n$ on suljettu, siispä $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n = \emptyset$ on avoin.

Avoimuus voidaan määritellä myös havainnollisemmin:

Lause 1.3.3. $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$, $\exists$ $r > 0$ s.e. $B(x,r) \subset A$.



Tod. $\Rightarrow$. Tehdään vastaväite:

$\exists\, x \in A$ s.e. $\forall\, r > 0$ $\exists\, y(r) \in \mathbb{R}^n \setminus A$

s.e. $y(r) \in B(x,r)$.

Olk. $y^n = y(1/n)$. Tällöin

$$\begin{cases} y^n \in B(x, 1/n) \Rightarrow \lim y^n = x \\ y^n \in \mathbb{R}^n \setminus A \leftarrow \text{sulj.} \Rightarrow x \in \mathbb{R}^n \setminus A \ \lightning. \end{cases}$$

Siis $\forall x \in A$ $\exists\, r > 0$ s.e. $B(x,r) \subset A$.

$\Leftarrow$: Os. että $\mathbb{R}^n \setminus A$ on sulj. Olk. $x^n \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ja $x = \lim x^n$. Jos olisi $x \in A$, niin $\exists\, r > 0$ s.e. $B(x,r) \subset A$. Tois $x = \lim x^n \Rightarrow \exists N$ s.e. $n > N \Rightarrow \|x - x^n\| < r$, eli

$\mathbb{R}^n \setminus A \ni x^n \in B(x,r) \subset A$. $\lightning$. $\square$

Tällä on mielenkiintoinen seuraus: $\mathbb{R}^n$ on itse avoin $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n = \emptyset$ suljettu.

[$\mathbb{R}^n$ ja $\emptyset$ ovat avoimia ja suljettuja.]

Pisteitä $x \in A$ joille on L. 1.3.3. ominaisuus kutsutaan joukon A sisäpisteiksi.

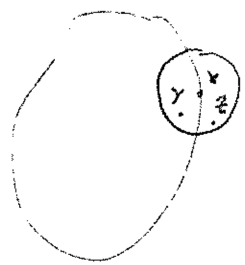
Joukko A avoin $\Leftrightarrow$ sen jokainen piste on sisäpiste.

Määr. 1.3.3. Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon A reunapiste jos se ei ole A:n eikä $\mathbb{R}^n \setminus A$:n sisäpiste. Joukon A reunapisteiden joukkoa merkitään ∂A:lla.

Huom. i) A:lla ja $\mathbb{R}^n \setminus A$:lla on siis samat reunapisteet.

ii) $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall r > 0$ $\exists$ $y \in A$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$ s.e.

$$y, z \in B(x,r)$$



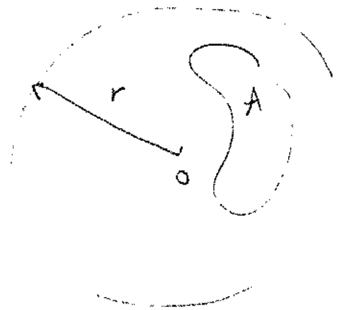
iii) Joukko $\bar{A} := A \cup \partial A$ on aina suljettu (Mieti miksi!); sitä kutsutaan A:n sulkeumaksi.

Avoimilla ja suljetuilla joukoilla on paljon hyödyllisiä ominaisuuksia, joihin tutustutte topologian kurssilla. Tällä kurssilla otamme niitä käyttöön tarpeen mukaan.

Tarvitsemme vielä yhden peruskäsitteen:

Määr. 1.3.4. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *kompakti*, jos se on suljettu ja *rajoitettu*, eli $\exists\ r>0$ s.t.

$A \subset B(0,r)$.



Huom. Tämä *ei* ole yleensä topologian kursseilla käytetty määritelmä. Yleinen määritelmä käyttää "avoimia peitteitä". Monasti kompaktisuus voidaan määritellä jonojen avulla (vrt. Martion moniste). $\mathbb{R}^n$:n tavanomaisen topologian tapauksessa kaikki nämä ovat kuitenkin ekvivalentteja.

Varoitus: Yleensä (es. ∞-ulotteinen tilanne) kompakti $\neq$ sulj. & raj. $\neq$ jonokompakti.

2. Reaaliarvoiset funktiot $\mathbb{R}^n$:ssä

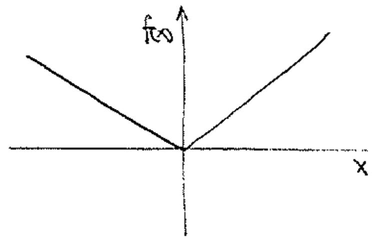
2.1. Funktiot $\mathbb{R}^n$:ssä

Tarkastellaan $\mathbb{R}^n$:n, tai sen osajoukon, reaaliarvoisia funktioita, eli jos $A \subset \mathbb{R}^n$, kuvauksia

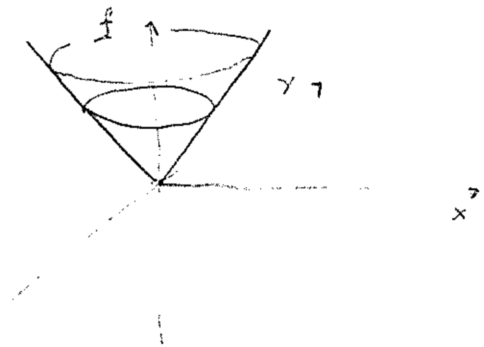
$$f: A \to \mathbb{R}.$$

Yhden muuttujan tilanteessa f:n kuvaajan hahmottelu usein auttaa. Korkeammissa dimensioissa hahmottaminen on hankalampaa.

Esim. 2.1.1. i) $(n=1)$: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$



ii) $(n=2)$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$



Entäs kun $n=3$ ...

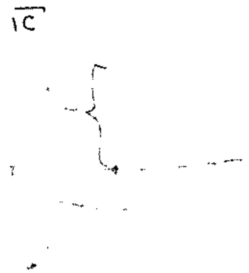
Tällöin voimme hahmottaa funktion käyttäytymistä tutkimalla sen tasa-arvo "käyriä" tai "pintoja":

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}.$$

Jos $c \in \mathbb{R}$, niin

$$A_c = \{ f(x,y,z) = c \} = \{ (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = c \}$$

$$= \begin{cases} \emptyset, & c < 0 \\ \{0\}, & c = 0 \\ B(0,\sqrt{c}), & c > 0 \end{cases}$$



2.2. Raja-arvot ja jatkuvuus

Jos $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, niin f:llä on pist. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ raja-arvo $a \in \mathbb{R}$ jos $\forall$ jonoille $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in A$ joille $\lim x_k = x_0$, pätee

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a.$$

Merkitsemme tällöin

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Huom: f:n ei tarvitse olla määritelty x_0:ssa.

Esim. 2.2.1 i) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(x_1,x_2) = \dfrac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$

Tutkitaan onko $\lim_{(x_1,x_2)\to 0} f(x_1,x_2)$ olemassa.

Olkoon aluksi $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2})$ jono $(1/k, 0)$.

Tällöin

$$f(1/k, 0) = \frac{2 \cdot 1/k \cdot 0}{1/k^2 + 0} = 0.$$

Toisaalta jos $\hat{x}_k = (\hat{x}_{k,1}, \hat{x}_{k,2}) = (1/k, 1/k)$, niin

$$f(1/k, 1/k) = \frac{2/k^2}{1/k^2 + 1/k^2} = 2.$$

Siis raja-arvoa origossa ei ole olemassa. On helppo huomata kuitenkin, että pitkin jokaista tason suoraa $x_2 = \alpha x_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ on olemassa raja-arvo:

$$f(x_1, \alpha x_1) = \frac{\alpha 2 x_1^2}{x_1^2 + \alpha^2 x_1^2} = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \longleftarrow \text{riippuu } \alpha\text{:sta.}$$

ii) Entä jos

$$g(x_1,x_2) = \frac{2x_1^2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \; ? \; \left(\text{kun } (x_1,x_2) \neq 0\right)$$

Nyt arvioidaan: jos $x_1 \neq 0$ niin

$$0 \le g(x_1,x_2) = \frac{2x_1^2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \le \frac{2x_1^2x_2^2}{x_1^2} = 2x_2^2 \le 2\|x\|,$$

ja kun $x_1 = 0$, niin

$$g(x_1,x_2) = g(0,x_2) = 0 \le \|x\|.$$

Siis
$$\lim_{x\to 0} g(x_1,x_2) = 0.$$

Samaan tapaan kuin analyysin kursseilla määrittelemme nyt jatkuvuuden:

Määr. 2.2.2, Olk. $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$. Funktio f on jatkuva pisteessä $x_0 \in A$ jos
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Huom. Kuten TopoI:n kursseilla ns., tämä voidaan muotoilla monilla eri tavoilla. Palaamme näihin lokakuussa.

Palataan nyt edellisiin esimerkkeihin.

Kysymys 1. Tarkastellaan funktiota
$$f(x_1,x_2) = \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, \quad (x_1,x_2) \neq 0.$$

Onko tämä jatkuva.

Vast. on! Jos $(y_1,y_2) \neq 0$ niin
$$\left.\begin{aligned}&\lim_{(x_1,x_2)\to(y_1,y_2)} (2x_1x_2) = 2y_1y_2 \\ &\lim (x_1^2+x_2^2) = y_1^2+y_2^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to y} \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} = \frac{2y_1y_2}{y_1^2+y_2^2} = f(y_1,y_2).$$

Kysymys 2. Voimmeko määritellä arvon f:lle origossa s.e. f olisi jatkuva $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Vast. Ei!

Kuten näimme
$$\lim_{x_1\to 0} f(x_1,0) = 0$$
$$\lim_{\substack{x_1,x_2\to 0\\ x_1=x_2}} f(x_1,x_2) = \frac{2}{2} = 1 \neq$$
ts. ei ole olemassa jatkuvaa jatketta koko $\mathbb{R}^2$:een.

Huom. Kaikki polynomit
$$p(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k_1+\dots+k_n\le m} a_{k_1\dots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$$
ovat aina jatkuvia, samoin jatkuvien funktioiden yhdistetyt kuvaukset määrittelyjoukossaan.

Tämän todistus kuten Analyysi I:ssä.

Seuraavaksi siirrymme derivaattaan.

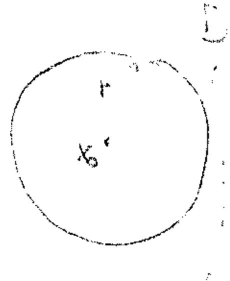
2.3. Osittaisderivaatat

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f: D \to \mathbb{R}$. Kiinnitetään piste $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in D$ ja valitaan $r > 0$ s.e.

$$B(x_0, r) \subset D.$$

Kun $|h| < r$ ja $k \in \{1, \dots, n\}$, niin

$$(x_{0,1}, \dots, x_{0,k} + h, \dots, x_{0,n}) \in B(x_0, r) \subset D.$$



Voimme siis tarkastella erotusosamäärää k:nnen muuttujan suhteen

$$\frac{f(x_{0,1}, \dots, x_{0,k} + h, \dots, x_{0,n}) - f(x_0)}{h}.$$

Nyt $(x_{0,1}, \dots, x_{0,k} + h, x_{0,n}) = x_0 + h e_k$. Jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h e_k) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

kutsumme tätä f:n <u>osittaisderivaataksi</u> k:nnen muuttujan suhteen pisteessä x_0, ja käytämme siitä merkintöjä

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k}, \quad \partial_k f(x_0)$$

Osittaisderivaatan laskeminen on yhtä helppoa kuin tavallisten derivaattojen: syy on seuraava. Tarkastellaan funktiota

$$\varphi_k: (x_{0,k} - r, x_{0,k} + r) \ni s \mapsto f(x_{0,1}, \dots, \overset{(k)}{s}, \dots, x_{0,n}).$$

Tämä on kuvaus $(x_{0,k} - r, x_{0,k} + r) \to \mathbb{R}$, ja nyt

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} = \varphi_k'(x_{0,k}). \quad (\text{jos olemassa})$$

<u>Nyrkkisääntö</u>: $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ lasketaan tavanomaisilla derivointisäännöillä pitämällä kaikkia muita koordinaatteja paitsi x_k vakioina, ja derivoimalla vain x_k-muuttujan.

<u>Esim.</u> i) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = x_1$$

ii) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1 x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 x_2$$

iii) $f(x_1,x_2,x_3) = x_3^4 \sin(x_1+x_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_3^4 \cos(x_1+x_2), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3^4 \cos(x_1+x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 4x_3^3 \sin(x_1+x_2).$$

iv) $f(x_1,x_2) = \|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Kun $(x_1,x_2) \neq 0$, niin (ketjusääntö / Analyysi I)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^{-1/2} \cdot 2x_1 = \frac{x_1}{\|x\|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\|x\|}.$$

Tutkitaan nyt osittaisderivaattoja origossa: muodostetaan erotusosamäärä

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{(h^2)^{1/2}}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h>0 \\ -1, & h<0. \end{cases}$$

Näin ollen $\nexists$ raja-arvo $\lim \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$ (Riippuu h:n merkistä!)

Samoin käy $\partial_2 f(0,0)$:lle.

Kuten Analyysi I:ssä, osittaisderivaatalle pätevät seuraavat alkeislaskusäännöt:

(ol. $f,g: D \to \mathbb{R}$, x_0, r kuten edellä)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial (f+g)(x_0)}{\partial x_k} &= \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} + \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial (\alpha f)(x_0)}{\partial x_k} &= \alpha \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ vakio} \end{aligned}\right\} \text{Osittaisderivointi on lineaarinen operaatio.}$$

2.4. Tangenttitaso ja gradientti

Kun $n=1$, niin analyysi I:ssä on os.

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow f \text{ on jva pisteessä } x_0.$$

Tod. Nyt olk.

$$\mathcal{E}(h;x_0) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Nyt $\lim_{h\to 0} \mathcal{E}(h;x_0) = f'(x_0)$, ja niin

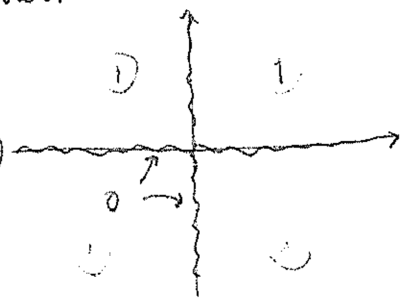
$$|f(x_0+h)-f(x_0)| = \underbrace{|h|}_{\to 0}\, \underbrace{\mathcal{E}(h;x_0)}_{\to f'(x_0)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

eli $f(x_0+h) \to f(x_0)$, kun $h \to 0$.

Tarkastellaan tilannetta korkeammissa dimensioissa:

olkoon $n=2$ ja

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x_1=0 \text{ tai } x_2=0\\ 1 & \text{muulloin}\end{cases}$$



Tällöin $\forall h\neq 0$

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0=\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$$

$\Rightarrow$ $\partial_1 f(0,0)=\partial_2 f(0,0)=0$,

mutta f ei ole jva origossa.

Siis

Osittaisderivaattojen olemassaolo ei takaa edes jatkuvuutta!

Palataan nyt takaisin dimensioon $n=1$. Olkoon

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a\in\mathbb{R}.$$

Siis
$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-a\right]=0.$$

Merkitään $\varepsilon(h;x_0)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-a$

Nyt voimme kirjoittaa

$$\begin{cases}f(x_0+h)-f(x_0)=ah+h\,\varepsilon(h;x_0).\\ a=f'(x_0)\end{cases}$$

Yleistämme tämän ominaisuuden funktioille

$f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ avoin seuraavassa määritelmässä

<u>Määr. 2.4.1.</u> f on <u>differentiaituva</u> pisteessä x_0

jos $\begin{cases}\exists\, r>0 \text{ s.e. } \forall\, h\in\mathbb{R}^n,\ \|h\|<r \text{ pätee}\\ a\in\mathbb{R}^n\end{cases}$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\langle a,h\rangle+\|h\|\,\varepsilon(h;x_0),$$

missä $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h;x_0)=0$.

Osoittautuu että tämä on oikea tapa yleistää derivoituvuuden käsite $\mathbb{R}^n$:ään.

Ensinnäkin:

<u>Lause 2.4.2.</u> Jos f on diff:va pist. x_0 niin f on jva pisteessä x_0.

Tod. $$|f(x_0+h)-f(x_0)|\le\|a\|\,\|h\|+\|h\|\,\varepsilon(h;x_0)\xrightarrow[\|h\|\to 0]{}0.\quad\square$$

Toisaalta:

Lause 2.4.3. Määr. 2.4.1 tilanteessa vektori a (jos olemassa) on yksikäsitteisesti määrätty.

Tod. ol. että $\exists\, r>0$ s.e. kahdelle vektorille $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\langle a_2, h\rangle + \|h\|\varepsilon^2(h;x_0) = f(x_0+h)-f(x) = \langle a_1, h\rangle + \|h\|\,\varepsilon^1(h;x_0)$$

eli $\forall\, h\neq 0$, $\|h\|<r$

$$\langle a_1-a_2, h\rangle = \|h\|\left(\varepsilon^2(h;x_0)-\varepsilon^1(h;x_0)\right).$$

Jaetaan $\|h\|$:lla ja merk. $\omega = h/\|h\| \in S^{n-1}$ (eli $\|\omega\|=1$)

$$\langle a_1-a_2, \omega\rangle = \varepsilon^2(h;x_0)-\varepsilon^1(h;x_0)).$$

Nyt pidetään suunta ω kiinteänä ja annetaan $\|h\|\to 0$: Saadaan

$$\langle a_1-a_2, \omega\rangle = 0 \quad \forall\, \omega, \ \|\omega\|=1.$$

Erityisesti voimme valita, jos $a_1\neq a_2$

$$\omega = \frac{a_1-a_2}{\|a_1-a_2\|}, \text{ ja siis}$$

$$0 = \frac{1}{\|a_1-a_2\|}\langle a_1-a_2, a_1-a_2\rangle = \frac{\|a_1-a_2\|^2}{\|a_1-a_2\|} = \|a_1-a_2\| \ \text{↯}.$$

Siis $a_1=a_2$. □

Määr. 2.4.4. Määr. 2.4.1 yksik. määrättyä vektoria a kutsutaan f:n gradientiksi pisteessä x_0, ja merk. $\nabla f(x_0)$:lla.

Voimme myös laskea $\nabla f(x_0)$:n komponentit: Olkoon

$$(\nabla f)(x_0) = (a_1, \dots, a_n).$$

Valitaan $0\neq\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda|<r$ ja $k\in\{1,\dots,n\}$.

Olkoon $h=\lambda e_k$. Tällöin

$$f(x_0+\lambda e_k) - f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \lambda e_k\rangle + |\lambda|\,\varepsilon(\lambda e_k; x_0),$$

eli

$$\underbrace{\frac{f(x_0+\lambda e_k)-f(x_0)}{\lambda}}_{\lambda\to 0:\ \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k}} = \langle \nabla f(x_0), e_k\rangle + \frac{|\lambda|}{\lambda}\varepsilon(\lambda e_k;x_0)$$

$$= a_k \pm \varepsilon(\lambda e_k; x_0) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} a_k,$$

siis $a_k = \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_k}$, ja saamme gradientille lausekkeen

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\right).$$

Esim. 2.4.5. i) Laskataan funktion

$$f(x_1,x_2) = \sin(x_1 x_2)$$

gradientti.

$$\partial_1 f(x_1,x_2) = x_2\cos(x_1x_2)$$

$$\partial_2 f(x_1,x_2) = x_1\cos(x_1x_2)$$

$$\nabla f(x_1,x_2) = \big(x_2\cos(x_1x_2),\ x_1\cos(x_1x_2)\big) = (x_2,x_1)\cos(x_1x_2)$$

ii) Olkoon $g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Onko g diff:va?

Tutkitaan erotusta

$$g(x_1+h_1, x_2+h_2) - g(x_1,x_2) = (x_1+h_1)^2 + (x_2+h_2)^2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$= 2x_1h_1 + 2x_2h_2 + h_1^2 + h_2^2$$

$$= \langle \underbrace{(2x_1, 2x_2)}_{=\nabla g}, \underbrace{(h_1,h_2)}_{=h} \rangle + \|h\|^2 .$$

Siis g on diff:va joka pisteessä,

$$\begin{cases} \nabla g = 2(x_1,x_2) \\ \varepsilon(h) = \|h\| . \end{cases}$$

2.5. Derivoit[illegible]vantoja

Kuten edellä nähtiin, olennaista ei ole derivaattojen olemassaolo, vaan funktion differentioituvuus. Tämän tarkistaminen joka kerta suoraan määritelmästä on turhan hankalaa. Tarvitsemme helpomman konstin. Tämän antaa seuraava teoreema.

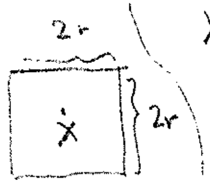
Teor. 2.5.1. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f: D \to \mathbb{R}$ jva. Jos osittaisderivaatat $\partial_k f$, $k=1,\dots,n$ ovat olemassa ja jatkuvia D:ssä $\Rightarrow$ f on diff:va D:ssä.

Huomautus ennen todistusta: yksi oletus f:n jatkuvuudesta on turha. differentioituvuus seuraa ilmankin, ja tämä implikoi taas jatkuvuuden. Pidä silmällä todistuksen kulkua, ja tarkkaile käytämmekö jatkuvuutta!

Tod. Ol. ensin $n=2$. Yleinen tapaus menee aivan samoin. Olkoon

$X_0 = (a,b) \in D$, ja $r>0$ s.e. neliö Q

$= [a-r, a+r] \times [b-r, b+r] \subset D$.



Olkoon $x = (x_1, x_2) \in Q$; $x = (a+h, b+k)$,

$|h|, |k| < r$.

Nyt

$$f(x) - f(x_0) = f(a+h, b+k) - f(a,b).$$

$$= f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a,b).$$

olkoon

$$\varphi(t) = f(a+t, b+k), \quad |t| < r.$$

$\partial_1 f$ olemassa ja jva $\Rightarrow$

$$\varphi'(t) = \partial_1 f(a+t, b+k), \quad \varphi' \text{ jva}, \ |t| < r.$$

Siis tavallinen yhden muuttujan väliarvolause

ko. φ:n antaa

$$\varphi(h) - \varphi(0) = f(a+h, b+k) - f(a,b)$$

$$\overset{\parallel}{\varphi'(\xi) h} = (\partial_1 f)(a+\xi, b+k) h \text{ jollain } \xi \in \mathbb{R}, \ |\xi| < |h|.$$

Samoin ant.

$$\psi(s) = f(a, b+s) - f(a,b), \quad |s| < r,$$

saamme

$$f(a, b+k) - f(a,b) = (\partial_2 f)(a, b+\vartheta) k, \quad |\vartheta| < |k|. \ \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Siis

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = (\partial_1 f)(a+\xi, b+k) h + (\partial_2 f)(a, b+\vartheta) k$$

$= \langle a(\xi, \vartheta), (h,k) \rangle$, missä $a(\xi,\vartheta) = (\partial_1 f(a+\xi, b+k), \partial_2 f(a, b+\vartheta))$

Nyt "pakottamalla" tämä differenssiosamäärän saamme

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \langle (\partial_1 f(a,b), \partial_2 f(a,b)), (h,k) \rangle$$

$$+ \|(h,k)\| \underbrace{\left[\frac{a(\xi,\vartheta) - a(0,0)}{\|(h,k)\|} \right]}_{=: \varepsilon((h,k))}.$$

Nyt on os. että

$$\lim_{(h,k) \to 0} \varepsilon((h,k)) = 0.$$

Tällöin f:n differentiaalisuus (a,b):ssä on os.

Nyt

$$\left| \frac{a(\xi,\vartheta) - a(0,0)}{\|(h,k)\|} \right| = \frac{1}{\|(h,k)\|} \Big| \big\langle (\partial_1 f(a+\xi, b+k) - \partial_1 f(a, b+k),$$

$$\partial_2 f(a, b+\vartheta) - \partial_2 f(a,b)), (h,k) \big\rangle \Big|$$

$$\overset{C-S}{\le} \frac{1}{\|(h,k)\|} \|(\partial_1 f(a+\xi, b+k) - \partial_1 f(a, b+k), \partial_2 f(a, b+\vartheta) - \partial_2 f(a,b))\|$$

$$\times \|(h,k)\| \le \|\partial_1 f(a+\xi, b+k) - \partial_1 f(a, b+k), \partial_2 f(a, b+\vartheta) - \partial_2 f(a,b)$$

$\xrightarrow[|h|,|k|\to 0]{} 0$, sillä $\partial_1 f$ & $\partial_2 f$ jv:n ja $\begin{cases}|\xi|<|h| \\ |\eta|<|k|\end{cases}$

□

Lasketaan lisää gradientteja:

Esim 2.5.2. (tärkeä)

$$f(x)=\|x\|,\quad x\neq 0.$$

Nyt kun $x\neq 0$, niin

$$\frac{\partial\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}{\partial x_k} = \underbrace{\frac{1}{2}(x_1^2+\dots+x_n^2)^{-1/2}}_{\text{"ulkof. deriv."}}\cdot\underbrace{2x_k}_{=\frac{\partial(x_1^2+\dots+x_n^2)}{\partial x_k},\ \text{sisäf. deriv.}}$$

$$= \frac{x_k}{\|x\|}.$$

Siis

$$\nabla f(x)=\frac{1}{\|x\|}(x_1,\dots,x_n)=\frac{x}{\|x\|},\quad x\neq 0.$$

Huomaa f:n taso-arvopinnat ovat

$$A_c=\{f(x)=c\}=B(0,c),\quad c>0,$$

ja aina $\nabla f\perp$ pintaa A_c vastaan

Tulemme näkemään, että yleisemminkin

$\boxed{\nabla f \text{ on } f\text{:n taso-arvopintojen normaali!}}$

Palataan nyt yhdistetyn funktion derivointiin (jota olemme jo harjoitelleet vetoamalla vastaavaan 1-ulotteiseen tulokseen.) Tarkastellaan aluksi seuraavaa tilannetta:

Lause 2.5.3. Olk. $D\subset\mathbb{R}^n$ avoin, $h: D\to\Delta\subset\mathbb{R}$, $\Delta\subset\mathbb{R}$ avoin väli, $g:\Delta\to\mathbb{R}$.

Tarkastellaan yhd. kuvausta $f=g\circ h$.

$$D\xrightarrow{h}\Delta\xrightarrow{g}\mathbb{R},\qquad g\circ h=f.$$

Jos h:lla $\forall$ os.derivaatat ja g deriv., niin

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}=g'(h(x))\frac{\partial h(x)}{\partial x_k},\quad k=1,\dots,n.$$

Tod. Helppo, olk. esim. $k=1$. Hm. erotusosamäärä

$$(*)\quad \frac{f(x+te_1)-f(x)}{t} = \frac{g(h(x+te_1))-g(h(x))}{t} = \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$$

missä

$$\varphi(t) = g(h(x+te_1)), \quad |t| \text{ riitt. pieni.}$$

Tällöin φ on derv. Olkoon $\psi(t) = h(x+te_1)$.

Nyt

$$\varphi = g \circ \psi(t),$$

joten ketjusääntö $\Rightarrow$

$$(**)\quad \varphi'(0) = g'(\psi(0))\,\psi'(0),$$

ja lis.

$$\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t} = \frac{h(x+te_1)-h(x)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}$$

ja

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \varphi'(0).$$

Siis $(*) \Rightarrow$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_1)-f(x)}{t} = \varphi'(0) \overset{(**)}{=} g'(\psi(0))\,\psi'(0)$$

$$= g'(h(x))\,\frac{\partial h}{\partial x_1}(x). \quad \square$$

Kenttäarvojen keskeiset kohdat:

a) Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, o. derivaatat määritellään erotusosamäärän raja-arvoina (jos olemassa)

$$\partial_k f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_k)-f(x)}{h}$$

b) Os. derivaattojen olemassaolo ei takaa vielä f:n jatkuvuutta. Tähän tarvitaan vahvempi ominaisuus (kun $n=1$, on tämä kuitenkin käsitteenä yhtäpitävä derivaatan olemassaolon kanssa), eli differentioituvuus:

$$f(x+h) - f(x) = \langle \nabla f(x), h\rangle + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

$\|h\|$ riitt. pieni.

Tässä i) $\nabla f = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$ on f:n gradientti

ii) $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

c) Jos $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ olemassa ja jatkuvia D:ssä

$\Rightarrow$ f on diffva D:ssä.

↓ huom. reaaliarvoinen!

4) Kun $f: D \to \mathbb{R}$, osittaisderivaatat voi laskea kuten tavalliset derivaatat pitämällä muita muuttujia vakioina. Erityisesti pätee

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_k(f+g) = \partial_k f + \partial_k g \\ \partial_k(\alpha f) = \alpha \partial_k f \end{array}\right\} \text{lineaarisuus}$$

I $\mathbb{R}$:n väli

$$\partial_k(h \circ f) = h'(f(x))\, \partial_k f(x), \text{ kun } \begin{cases} f: D \to I, \\ h: I \to \mathbb{R}, \end{cases}$$

↑ ketjusääntö.

2.6. Vektoriarvoiset kuvaukset

Tarkastelemme nyt yleisempää tilannetta; olkoon

$$f: D \to \mathbb{R}^p, \quad D \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin}, \quad n, p \in \mathbb{N}$$

Tällaista funktiota kutsutaan vektoriarvoiseksi.
Kirjoittamalla $f(x)$ koordinaateissa

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$$

saadaan määriteltyä ns. koordinaattifunktiot f_i.

Näille kuvauksille on keskeinen merkitys mm. $\mathbb{R}^n$:n pintojen teoriassa.

Tuttuun tapaan f on jatkuva (pist x_0) $\Leftrightarrow$ kaikki koordinaattifunktiot f_i, $i=1,\ldots,p$, ovat jatkuvia (x_0:ssa).

Differentioituvuudenkin yleistäminen on suoraviivaista:

Määr. 2.6.1. Olkoon $f: D \to \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin.
f on diff:va pisteessä $x \in D$ jos on olemassa lineaarikuvaus $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ (joka siis riippuu pisteestä x) s.e. pätee

$$f(x+h) - f(x) = L(h) + \|h\|\, \varepsilon(h) \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n, \ \|h\| \text{ riitt. pieni}$$

Katsotaan esimerkkejä:

Esim. 2.6.2. i) olk. $p=1$, eli f on reaaliarvoinen.
Tällöin voimme määritellä (mikäli f diff:va pist. x)

$$L(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle.$$

(lineaarinen muuttujan h suhteen!)

ii) Olkoon $n = p = 2$, ja

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2).$$

Siis

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

Edelleen, jos $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ niin

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)$$

$$= ((x_1+h_1)^2 + (x_2+h_2)^2, (x_1+h_1)^2 - (x_2+h_2)^2) - (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$$

$$= (x_1^2 + 2x_1h_1 + h_1^2 + x_2^2 + 2x_2h_2 + h_2^2 - x_1^2 - x_2^2,$$

$$x_1^2 + 2x_1h_1 + h_1^2 - x_2^2 - 2x_2h_2 - h_2^2 - x_1^2 + x_2^2)$$

$$= (2x_1h_1 + 2x_2h_2 + h_1^2 + h_2^2, 2x_1h_1 - 2x_2h_2 + h_1^2 - h_2^2)$$

$$= (2x_1h_1 + 2x_2h_2, 2x_1h_1 - 2x_2h_2) + (h_1^2 + h_2^2, h_1^2 - h_2^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \|h\| \begin{pmatrix} \|h\| \\ \frac{h_1^2 - h_2^2}{\|h\|} \end{pmatrix},$$

Olkoon nyt L matriisin

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

määräämä lineaarikuvaus. Olkoon

$$\varepsilon(h) = \begin{pmatrix} \|h\| \\ (h_1^2 - h_2^2)/\|h\| \end{pmatrix}.$$

On vielä os. että $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$ kun $\|h\| \to 0$. Nyt

$$\|h\| \longrightarrow 0 \text{ kun } h \to 0 \quad (\text{triv}).$$

Edelleen

$$\frac{|h_1^2 - h_2^2|}{\|h\|} \leq \frac{|h_1 + h_2|\,|h_1 - h_2|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{2\cancel{\|h\|}\,|h_1 - h_2|}{\cancel{\|h\|}} \leq 4\|h\| \longrightarrow 0$$

kun $|h| \to 0$.

Siis f on diff:va jok. pist. $x \in \mathbb{R}^2$.

Lähes sama todistus kuin aiemmin os. että jos lin. kuvaus L on olemassa, on se yksikäsitteinen.

<u>Määr. 2.6.3.</u> Kuvausta L kutsutaan f:n derivaataksi (tai derivaatta matriisiksi) pisteessä x. Sitä merk. on

$$f'(x), \ \partial f(x) \text{ tai } \nabla f(x).$$

Siis edellisen esimerkin tilanteessa

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}.$$

Kuten aikaisemmin, nytkin pätee.

1) $f : D \to \mathbb{R}^p$ on diff/va $\iff$ f_k :t ovat diff/via $\forall k$!

2) f diff/va $\Rightarrow$ f jva.

Kuinka lasketaan $f'(x)$?

Nyt

$$f(x+h) - f(x) = L(h) + \|h\| \, \varepsilon(h).$$

Valitaan $h = te_k$. Siis

$$f(x+te_k) - f(x) = t L(e_k) + |t| \, \varepsilon(te_k),$$

ja otetaan sisätulo l:n sannd. ch. vektorin kanssa:

$$\langle e_l, f(x+te_k) - f(x) \rangle = t \langle e_l, L(e_k) \rangle + |t| \langle e_l, \varepsilon(te_k) \rangle$$

$$\parallel$$

$$f_l(x+te_k) - f_l(x)$$

Nyt jos $L = (l_{ij})$, niin

$\langle e_l, L(e_k) \rangle = l_{lk}$ ("matriisin L (l,k)-alkio)

$\langle e_l, \varepsilon(te_k) \rangle \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

"l = rivi"
"k = sarake",

Siis f_l diff/va $\Rightarrow$

$$\boxed{L_{lk} = \langle e_l, L(e_k) \rangle = \frac{\partial f_l(x)}{\partial x_k},} \qquad L = f'(x) = \left(\frac{\partial f_l(x)}{\partial x_k} \right)_{\substack{k=1,\dots,n \\ l=1,\dots,p}}$$

Derivaattamatriisin komponentit ovat koordinaattifunktioiden osittaisderivaattoja.

Huom. Jos $p=1$, eli f on reaaliarvoinen, on sen derivaattamatriisi siis $(1 \times n)$-matriisi,

$$f'(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)) = \underbrace{\nabla f(x)}_{\text{gradientti}}.$$

Tämä yhtyy aikaisempaan määritelmään!

Esim. 2.6.4 i) Olkoon andettu

$$f(x_1,x_2) = (x_1^2 + x_2^2,\ x_1^2 - x_2^2).$$

Siis $f_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $f_2(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \partial_1 f_1 = 2x_1,\ \partial_2 f_1 = 2x_2 \\ \partial_1 f_2 = 2x_1,\ \partial_2 f_2 = -2x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

kaikkialla.

ii) $g(x_1,x_2,x_3) = (\sin(x_1+x_2),\ x_3^4 \cos x_1).$

Nyt $m = 3$, $p = 2$, joten derivaatta on 2×3-matriisi. Lasketaan sen komponentit:

1-rivi: $f_1(x_1,x_2,x_3) = \sin(x_1+x_2)$.

$\partial_1 f_1 = \cos(x_1+x_2)$, $\partial_2 f_1 = \cos(x_1+x_2)$, $\partial_3 f_1 = 0$

2-rivi: $f_2(x_1,x_2,x_3) = x_3^4 \cos x_1$

$\partial_1 f_2 = -x_3^4 \sin x_1$, $\partial_2 f_2 = 0$, $\partial_3 f_2 = 4x_3^3 \cos x_1$

$\therefore$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_1+x_2) & \cos(x_1+x_2) & 0 \\ -x_3^4 \sin x_1 & 0 & 4x_3^3 \cos x_1 \end{pmatrix}$$

Os. derivaattojen laskusäännöistä seuraa suoraan:

a) $(f+g)'(x) = \underbrace{f'(x) + g'(x)}_{\text{matriisisumma}}$, $\quad f,g\ D \to \mathbb{R}^p$

b) $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Entä yhdistetty kuvaus?

Olkoon diffvia $f : D \to D'$, $D \subset \mathbb{R}^m$ avoin, $D' \subset \mathbb{R}^n$
$g : D'' \to \mathbb{R}^p$, $D'' \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $D' \subset D''$.

Nyt

$$g \circ f : D \xrightarrow{f} D' \longrightarrow \mathbb{R}^p,$$

ja on odottava $(g \circ f)'(x)$ on $(p \times m)$-matriisi, jos yleensä olemassa.

Huomaa:

$$\left\{\begin{array}{l} g'(y) \text{ on } (p \times n)\text{-matriisi} \\ f'(x) \text{ on } (n \times m)\text{-matriisi} \end{array}\right. \longrightarrow \text{matriisitulo } g'(y) f'(x) \text{ on määritelty!}$$

Nyt pätee

Teor. 2.6.5. (Ketjusääntö)

Jos f diffva x:ssä, g diffva $f(x)$:ssä, niin $(g\circ f)$ on diffva x:ssä, ja

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x) \quad \longleftarrow \text{Matriisi-tulo.}$$

Esim. tehtävästä kirjoita ja kuvamio. Ensin muuttujia

Esim. i) $f(x_1,x_2) = (\underbrace{x_1+x_2^2}_{=y_1},\ \underbrace{x_1^2-x_2}_{=y_2})$

$g(y_1,y_2) = (y_1,\ y_2,\ y_1y_2)$.

Siis $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \Rightarrow g\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$,

Nyt

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g'(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow g'(f(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1^2-x_2 & x_1+x_2^2 \end{pmatrix}$$

ja siis

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1^2-x_2 & x_1+x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \\ x_1^2-x_2+2x_1(x_1+x_2^2) & 2x_2(x_1^2-x_2)-(x_1+x_2^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \\ 3x_1^2+2x_1x_2^2-x_2 & x_2^2+2x_1^2x_2-x_1 \end{bmatrix}.$$

ii) $f(x_1,x_2) = (\underbrace{e^{x_1}+x_2}_{=y_1},\ \underbrace{e^{-x_2}-x_1}_{=y_2})$

$g(y_1,y_2) = (\sin(y_1y_2),\ \cos(y_1y_2))$

Nyt $m=n=2$, ja ~~kuvaus~~ $(g\circ f)'$ on siis 2×2-matriisi

Lasketaan:

$$f'(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 1 \\ -1 & -e^{-x_2} \end{bmatrix}$$

$$g'(y) = \begin{bmatrix} y_2\cos(y_1y_2) & y_1\cos(y_1y_2) \\ -y_2\sin(y_1y_2) & -y_1\sin(y_1y_2) \end{bmatrix}$$

ja siis

$$g'(f(x)) = \begin{bmatrix} (e^{-x_2}-x_1)\cos\left((e^{x_1}+x_2)(e^{-x_2}-x_1)\right) & (e^{x_1}+x_2)\cos\left((e^{x_1}+x_2)(e^{-x_2}-x_1)\right) \\ (x_1-e^{-x_2})\sin(\cdots) & -(e^{x_1}+x_2)\sin(\cdots) \end{bmatrix}$$

$(g\circ f)'$:n derivaatta on siis

$$(g\circ f)'(x) = \begin{bmatrix} \cos\left((e^{x_1}+x_2)(e^{-x_2}-x_1)\right)\left(e^{x_1-x_2}-x_1e^{x_1}-e^{x_1}-x_2\right) \\ \sin\left((e^{x_1}+x_2)(e^{-x_2}-x_1)\right)\left(x_1e^{x_1}-e^{x_1-x_2}+x_2+e^{x_1}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\left((e^{x_1}+x_2)(e^{-x_2}-x_1)\right)\left(e^{-x_2}-x_1-e^{x_1-x_2}-x_2e^{-x_2}\right) \\ \sin\left((e^{x_1}+x_2)(e^{-x_2}-x_1)\right)\left(x_1-e^{-x_2}+e^{x_1-x_2}+x_2e^{-x_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta(x))\left(e^{x_1-x_2}-(1+x_1)e^{x_1}-x_2\right) & \cos(\theta(x))\left(-e^{x_1-x_2}+(1-x_2)e^{-x_2}-x_1\right) \\ \sin(\theta(x))\left(-e^{x_1-x_2}+(1+x_1)e^{x_1}+x_2\right) & \sin(\theta(x))\left(e^{x_1-x_2}-(1-x_2)e^{-x_2}+x_1\right) \end{bmatrix}$$

merkitään vaikka näin

Kuinka ketjusääntö todistetaan: idea on seuraava, kun $\|k\|$ on riittävän pieni,

$$g(y+k)-g(y) = g'(y)k + \|k\|\,\varepsilon_1(k). \quad (1)$$

Valitaan nyt

$$y = f(x), \quad y+k = f(x+h),$$

eli

$$k = f(x+h) - y = f(x+h)-f(x) = f'(x)h + \|h\|\,\varepsilon_2(h). \quad (2)$$

Siis (1), (2) $\Rightarrow$

$$g(f(x+h))-g(f(x)) = g'(f(x))\left(f'(x)h + \|h\|\,\varepsilon_2(h)\right)$$
$$+ \|f'(x)h + \|h\|\,\varepsilon_2(h)\|\,\varepsilon_1(k)$$
$$= g'(f(x))f'(x)h + \|h\|\,\varepsilon(h)$$

$\leftarrow$ Tämän lauseke on "sopiva":

$$\to \varepsilon(h) = g'(f(x))\varepsilon_2(h) + \frac{1}{\|h\|}\|f'(x)h + \|h\|\,\varepsilon_2(h)\|\,\varepsilon_1(k) \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0, \text{ sillä } k\to 0, \text{ kun } h\to 0.$$

$\therefore$ $g\circ f$ on diff:va ja $\boxed{(g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).}$

2.7. Suunnattu derivaatta

Pikakertaus Juhan kertomasta: Ol. $f: D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ avoin; $v\in\mathbb{R}^n$; $\|v\|=1$.

$\hookleftarrow$ diff:va

Derivaatta suuntaan v:

$$\underline{\partial_v f(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\langle f'(x), tv\rangle}{t} + \frac{\|tv\|}{t}\varepsilon(tv) = \langle f'(x), v\rangle.$$

Sama;
Mitä deriv. kertoo f:stä:

6. gradientti

Kun h pieni,

$$f(x+h) - f(x) \approx \langle \nabla f(x), h \rangle . \qquad h = tv, \quad \|v\| = 1.$$

Cauchy-Schwartz: $|\langle \nabla f(x), h \rangle| \leq \|\nabla f(x)\| \, |t|$

ja saa suurimman arvonsa, kun

$$h_{Max} = t \, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

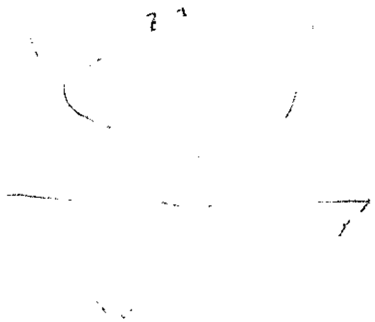
pienimmän arvonsa, kun

$$h_{min} = -t \, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} .$$

Siis f kasvaa eniten $\nabla f(x)$:n suuntaan ∇ vähenee nopeiten $-\nabla f$:n suuntaan.

Esim. Palataan vielä funktioon

$$f(x) = \|x\|^2$$



Nyt

$$\nabla f(x) = 2x ,$$

ja intuitiivisesti tuntuu

uskottavalta, että f kasvaa nopeiten saten, eli $x/\|x\| = \nabla f/\|\nabla f\|$:n suuntaan, ja vähenee nopeiten vastakkaiseen suuntaan.

2.8. Kertaus: Taylorin kaava $\mathbb{R}$:ssä.

Olkoon $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli.
Olk. $x \in I$. Halutaan arvioida erotusta

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) .$$

Jos φ on diff.va, niin ↓ "lin. approksimaatio φ:lle".

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \varphi'(x) h + |h| \, \varepsilon(h)$$

Entä jos φ on 2 kertaa diff.va. Saamme aikaan paremman?

Olkoon $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \varphi(x + (1-t)h)$$

Nyt

$$g'(t) = -\varphi'(x + (1-t)h)\, h$$

ja siis

$$\int_0^1 g'(t)\, dt = \Big/_0^1 g(t) = \varphi(x) - \varphi(x+h)$$

Edelleen os. int. jos φ'' olem $\Rightarrow$ g'' ole

$$\int_0^1 g'(t)\,dt = \Big/_0^1 t\,g'(t) - \int_0^1 t\,g''(t)\,dt$$

$$= g'(1) - \int_0^1 t\,g''(t)\,dt.$$

Nyt

$$g'(1) = -\varphi'(x)\,h$$

$$g''(t) = h^2\varphi''(x+(1-t)h)$$

siis

$$\varphi(x+h)-\varphi(x) = -\int_0^1 g'(t)\,dt = -g'(1) + \int_0^1 t\,g''(t)\,dt$$

$$= \varphi'(x)h + h^2\int_0^1 t\,\varphi''(x+(1-t)h)\,dt.$$

Olemme siis päätyneet uudelleen differenssikehitelmään, mutta nyt meille on jäännöstermille entistäin hyödyllisempi lauseke

$$\varepsilon_1(h) = h\int_0^1 t\,\varphi''(x+(1-t)h)\,dt$$

| Siis jos φ'' olemassa!

Voimme jatkaa osittaisintegrointia, jos $\varphi^{(3)}$ on olemassa:

$$\int_0^1 t\,\varphi''(x+(1-t)h)\,dt = \Big/_0^1 \frac{1}{2}t^2\varphi''(x+(1-t)h)$$

$$+\int_0^1 \frac{t^2 h}{2}\varphi^{(3)}(x+(1-t)h)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\varphi''(x) + \frac{h}{2}\int_0^1 t^2\varphi^{(3)}(x+(1-t)h)\,dt,$$

siis

$$\varphi(x+h)-\varphi(x) = \varphi'(x)h + \frac{h^2}{2}\varphi''(x) + R_2(x,h),$$

$$R_2(x,h) = \frac{h^3}{2}\int_0^1 t^2\varphi^{(3)}(x+(1-t)h)\,dt.$$

Voimme jatkaa näin kun $\varphi\in C^{k+1}(I)$, $k=1,2,\dots$,

$$\varphi(x+h)-\varphi(x) = h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x) + \dots + \frac{h^k}{k!}\varphi^{(k)}(x) + R_k(x,h),$$

missä

$$R_k(x,h) = \frac{h^{k+1}}{k!}\int_0^1 t^k\varphi^{(k+1)}(x+(1-t)h)\,dt.$$

Tämä on Taylorin kaavan yleinen muoto $\mathbb{R}$:ssä.

2.9. Taylorin kaava $\mathbb{R}^n$:ssä

di $\partial_k f\in C^1(U)\ \forall k$

Olkoon nyt $f\in C^2(U)$, $U\subset\mathbb{R}^n$ avoin.

Voimme siis määritellä toisen kertaluvun osittaisderivaatat

$$\frac{\partial(\partial_k f)}{\partial x_\ell}, \quad k,\ell\in\{1,\dots,n\}.$$

Esim. 2.9.1 i) $n=2$, $f(x_1,x_2) = e^{x_1}\sin(x_1+x_2)$

$$\partial_1 f(x_1,x_2) = e^{x_1}\sin(x_1+x_2) + e^{x_1}\cos(x_1+x_2)$$

$$\partial_2 f(x_1,x_2) = e^{x_1}\cos(x_1+x_2)$$

$$\partial_1(\partial_1 f) = e^{x_1}\sin(x_1+x_2) + 2e^{x_1}\cos(x_1+x_2) - e^{x_1}\sin(x_1+x_2)$$
$$= 2e^{x_1}\cos(x_1+x_2)$$

$$\partial_2(\partial_1 f) = e^{x_1}\cos(x_1+x_2) - e^{x_1}\sin(x_1+x_2)$$

$$\partial_1(\partial_2 f) = e^{x_1}\cos(x_1+x_2) - e^{x_1}\sin(x_1+x_2)$$

$$\partial_2(\partial_2 f) = -e^{x_1}\sin(x_1+x_2)$$

Huomataan, että $\partial_2(\partial_1 f) = \partial_1(\partial_2 f)$. Tämä ei ole sattuma.

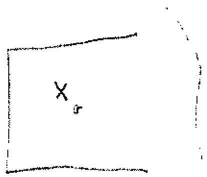
Lause 2.9.2. Jos $f \in C^2(U)$ niin $\partial_k(\partial_l f) = \partial_l(\partial_k f)\ \forall k,l$.

Tod. Ol. yksinkert. $n=2$, ja $k=1$, $l=2$. Olk.

$(x_1,x_2) \in Q \subset D$, Q (x_1,x_2)-keskinen neliö s.e.

(x_1,x_2), (x_1+h, x_2), (x_1, x_2+k), $(x_1+h, x_2+k) \in Q$,

$|h| < h_0 \quad |k| < h_0$.



Olk.

$$\varphi(t) = f(x+h, t) - f(x,t)$$
$$\psi(s) = f(s, x_2+k) - f(s, x_2)$$

Olk.

$$g(h,k) := \varphi(x_2+k) - \varphi(x_2) = f(x_1+h, x_2+k) - f(x_1, x_2+k)$$
$$- f(x_1+h, x_2) + f(x_1,x_2).$$

Toisin,

$$\psi(x_1+h) - \psi(x_1) = f(x_1+h, x_2+k) - f(x_1+h, x_2)$$
$$- f(x_1, x_2+k) + f(x_1,x_2) = g(h,k)$$

Siis

$$g(h,k) = \varphi(x_2+k) - \varphi(x_2) = \psi(x_1+h) - \psi(x_1).$$

Nyt

$$\varphi'(t) = \partial_2 f(x_1+h, t) - \partial_2 f(x_1, t)$$

ja VL $\Rightarrow$

$$g(h,k) = \varphi(x_2+k) - \varphi(x_2) = \varphi'(\xi)k \quad, |x_2 - \xi| < k$$
$$= (\partial_2 f(x_1+h, \xi) - \partial_2 f(x_1, \xi))k$$

Toisin. VL $\Rightarrow$

$$\partial_2 f(x_1+h, \xi) - \partial_2 f(x_1, \xi) = \partial_1(\partial_2 f)(\eta, \xi)h, \ |x_1 - \eta| < h.$$

Siis

$$\frac{\psi(h,k)}{hk} = \frac{\partial_1(\partial_2 f)(\eta,\xi)\,hk}{hk} \xrightarrow[h,k\to 0]{} \partial_1(\partial_2 f)(x_1,x_2).$$

Samoin

$$\frac{\psi(h,k)}{hk} = \frac{\varphi(x_1+h)-\varphi(x_1)}{hk} = \frac{\varphi'(\xi')h}{hk} \quad \left(\begin{array}{l} |\xi'-x_1|<h \\ |\eta'-x_2|<k \end{array}\right)$$

$$= \frac{[\partial_1 f(\xi',x_2+k)-\partial_1 f(\xi',x_2)]h}{hk} = \frac{\partial_2(\partial_1 f)(\xi',\eta')hk}{hk}$$

$$= \partial_2(\partial_1 f)(\xi',\eta') \longrightarrow \partial_2(\partial_1 f)(x_1,x_2)$$

$$\therefore \quad \partial_1(\partial_2 f) = \partial_2(\partial_1 f). \square$$

Voimme nyt todistaa Taylorin kaavan. Meille riittää toisen asteen kehitelmä:

Teor. 2.9.3. Olk. $f\in C^3(D)$, $D\subset\mathbb{R}^n$ avoin ja $x\in D$. Jos $\|h\|$ riitt. pieni ($h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$), niin

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k\partial x_l}h_k h_l$$

$$+ \|h\|^3 R(h),$$

missä $R(h)$ on rajoitettu pist. $h=0$ ympäristössä.

Tod. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi vain tapausta $n=2$.

Olkoon

$$F(t) = f(x_1+th_1,\ x_2+th_2), \quad |t|<1.$$

Tällöin $F\in C^3((-1,1))$, ja 1-ul. Taylorin kaava:

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + \frac{t^3}{2}\int_0^1 F^{(3)}((1-\vartheta)t)\,d\vartheta$$

Nyt

- $\boxed{F(0) = f(x_1,x_2)}$
- $F'(t) = \partial_1 f(x_1+th_1, x_2+th_2)h_1 + \partial_2 f(x_1+th_1, x_2+th_2)h_2$

eli

$$\boxed{F'(0) = \partial_1 f(x)h_1 + \partial_2 f(x)h_2}$$

- $F''(t) = \partial_{11} f(x_1+th_1, x_2+th_2)h_1^2$

$$+2\partial_{12}f(x_1+th_1, x_2+th_2)h_1h_2 + \partial_{22}f(x_1+th_1, x_2+th_2)h_2^2$$

eli

$$\boxed{F''(0) = \partial_{11}f(x)h_1^2 + 2\partial_{12}f(x)h_1h_2 + \partial_{22}f(x)h_2^2}$$

- Lopuksi,

$$F^{(3)}(t) = \sum_{r,s,\nu=1}^{n}\partial_r\partial_s\partial_\nu f(x+th)h_r h_s h_\nu$$

Eli

$$F^{(3)}((1-\theta)t) = \sum_{r,s,\gamma} \partial_r \partial_s \partial_\gamma f(x+(1-\theta)th)\, h_r h_s h_\gamma$$

ja siis

$$\frac{|F^{(3)}((1-\theta)t)|}{\|h\|^3} \leq \sum_{r,s,\gamma} |\partial_r \partial_s \partial_\gamma f(x+(1-\theta)th)| \leq M$$ riittävän pienillä $\|h\|$:n arvoilla, kun $\|h\| < 1$.

$\therefore$ Määritellään

$$R(h) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|h\|^{-3} F^{(3)}((1-\theta)t)\, dt. \qquad \square$$

Esim. 2.9.4. i) Olk. $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + x_2^2)$.

Nyt

$$\nabla f(x_1,x_2) = (2x_1 \cos(x_1^2+x_2^2),\ 2x_2 \cos(x_1^2+x_2^2))$$

ja

$$\partial_{11} f(x_1,x_2) = 2\cos(x_1^2+x_2^2) - 4x_1^2 \sin(x_1^2+x_2^2)$$

$$\partial_{12} f(x_1,x_2) = -4x_1x_2 \sin(x_1^2+x_2^2)$$

$$\partial_{22} f(x_1,x_2) = 2\cos(x_1^2+x_2^2) - 4x_2^2 \sin(x_1^2+x_2^2)$$

Siis

$$\nabla f(0) = (0,0),\ \partial_{11} f(0,0) = 2,\ \partial_{12} f(0,0) = 0,\ \partial_{22} f(0,0) = 2$$

Siis

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(2\cdot x_1^2 + 2\cdot x_2^2) + \|x\|^3 R(x)$$ jollakin R

$$= \|x\|^2 + \|x\|^3 R_1(x).$$

ii) $g(x_1,x_2) = e^{(x_1^2+x_2^2)}$.

$$g(0,0) = 1$$

$$\nabla g(x_1,x_2) = (2x_1 e^{\|x\|^2},\ 2x_2 e^{\|x\|^2})$$

$$\begin{cases} \partial_{11} g(x_1,x_2) = 2e^{\|x\|^2} + 4x_1^2 e^{\|x\|^2} & \therefore\ \partial_{11} g(0,0) = 2 \\ \partial_{12} g(x_1,x_2) = 4x_1x_2 e^{\|x\|^2} & \partial_{12} g(0,0) = 0 \\ \partial_{22} g(x_1,x_2) = 2e^{\|x\|^2} + 4x_2^2 e^{\|x\|^2} & \partial_{22} g(0,0) = 2 \end{cases}$$

Siis

$$g(x_1,x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2 + \|x\|^3 R_2(x)$$

2.10. Ääriarvot.

Olkoon $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Asetamme seuraavan määritelmän:

Määr 2.10.1. Piste $x_0 \in A$ on f:n lokaalimaksimi, jos on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\ x \in A \cap B(x_0,\delta),\ x \neq x_0$$

Jos pätee '<', kyseessä on aito lokaalimaksimi.

Samoin, jos $\exists\ \delta' > 0$ s.e.

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\ x \in A \cap B(x_0,\delta),\ x \neq x_0,$$

x_0 on lokaali minimi. Jos pätee '>', kyseessä on aito lokaali minimi.

Kuinka löytää lokaalit maksimit ja minimit, eli lokaalit ääriarvot? Ensimmäinen testi on seuraava:

Lause 2.10.2. Olkoon $x_0 \in A$ sisäpiste. Jos x_0 on lokaali ääriarvo, ja os. derivaatta $\partial f(x_0)/\partial x_k$ on olemassa, niin

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} = 0.$$

Tod. Olkoon

$$\varphi(t) = f(x_0 + t e_k),\ |t| < \alpha \leftarrow \text{riitt. pieni}$$

Nyt $\varphi'(0) = \partial f(x_0)/\partial x_k$. □
$\overset{\shortparallel}{0} \leftarrow$ analyysi I & II

Erityisesti, jos $\nabla f(x_0)$ on olemassa sisäpisteessä x_0, joka on lokaali ääriarvo, niin $\nabla f(x_0) = 0$!

[Piste jossa $\nabla f(x_0) = 0$ on f:n kriittinen piste].

Nyt pätee: Ol. $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, f diffva. f:n lokaalit ääriarvot ovat f:n kriittisiä pisteitä.

Kaikki kriittiset pisteet eivät tietenkään ole lokaaleja ääriarvoja.

Esim. i) $(n=1)$ $\quad f(t) = t^3$; $\quad f'(t) = 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Nyt jok. 0:n ystöv. on lukuja t_1, t_2 s.e.

$$f(t_1) < 0 < f(t_2) \quad \left(\text{ol. } \begin{array}{l} t_1 < 0, \\ t_2 > 0 \end{array} \right).$$

Siis 0 ei ole lokaali maksimi eikä minimi.

ii) $(n=2)$

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$$\nabla f(x_1,x_2) = (2x_1, -2x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1,x_2) = 0.$$

Siis origo on ainoa kriittinen piste. Nyt

$$f(x_1,0)=x_1^2>0 \quad \text{aina kun } x_1\neq 0$$
$$f(0,x_2)=-x_2^2<0 \quad -\text{"}- \quad x_2\neq 0$$

$\Rightarrow$ origo <u>ei</u> ole lokaali ääriarvo.

Tutkitaan nyt funktion f käytöstä kriittisen pisteen lähellä, ja ol. että $f\in C^3(U)$, U x_0:n ymp. Ol. $n=2$. aluksi:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\nabla f(x_0)h+\frac{1}{2}\big(\partial_{11}f(x_0)h_1^2+2\partial_{12}f(x_0)h_1h_2+\partial_{22}f(x_0)h_2^2\big)+\|h\|^3R(h)$$

Landau-merk.

$$=f(x_0)+\frac{1}{2}\big(a_{11}h_1^2+2a_{12}h_1h_2+a_{22}h_2^2\big)+O(\|h\|^3)$$

Jos $\|h\|$ on riittävän pieni lausekkeen ($h=(h_1,h_2)$)

$$q(h,h):=a_{11}h_1^2+2a_{12}h_1h_2+a_{22}h_{22}^2$$

merkki (ja käytös) määrää kaiken. q on ns. <u>neliömuoto</u>, ja se voidaan kirjoittaa

muodossa

$$q(h,h)=\langle Ah,h\rangle,\quad A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{bmatrix}$$ symmetrinen matriisi.

$$\left[\ \langle Ah,h\rangle=\left\langle\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}\right\rangle\right.$$

$$=\left\langle\begin{bmatrix}a_{11}h_1+a_{12}h_2\\a_{12}h_1+a_{22}h_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$=a_{11}h_1^2+a_{12}h_2h_1+a_{12}h_1h_2+a_{22}h_2^2$$

$$=a_{11}h_1^2+2a_{12}h_1h_2+a_{22}h_2^2.$$

Kuinka neliömuodon käytöstä voi ymmärtää?
Palautetaan mieliin Lin. alg II:n kurssilta.

Jos A on sym. $\mathbb{R}$-kert. matriisi, niin

$$A=U^t\Lambda U,\quad U \text{ ortog. matriisi eli } U^{-1}=U^t$$

$$\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\begin{bmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{bmatrix},\ \lambda_i \text{ om. arvot.}$$

"peilaus + koord. kierto"

Nyt

$$q(h,h) = \langle Ah, h\rangle = \langle U^{t}\Lambda U h, h\rangle = \langle \Lambda U h, U h\rangle$$

$$= \langle \Lambda h', h'\rangle \quad , \; h' = Uh \in \mathbb{R}^n.$$

Siis

$$q(h,h) = \langle \Lambda h', h'\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i'^2 , \; h_i' \in \mathbb{R}.$$

Jos haluamme tietää $q(h,h)$:n merkin, riittää siis tutkia $\sum \lambda_i h_i'^2$:n merkkiä, ja tämä määräytyy ominaisarvoista $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1) Jos $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, on $q(h,h)$ pos. definiitti

eli $\quad q(h,h) > 0 \,, \; h \neq 0$.

2) Jos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ on $q(h,h)$ pos. semidefiniitti, eli

$$q(h,h) \geq 0 \,, \; h \neq 0$$

3) Jos $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$, on $q(h,h)$ neg. def.

eli $\quad q(h,h) < 0 \quad \forall h \neq 0$

4) Jos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0$ on $q(h,h)$ neg. semidefiniitti eli

$$q(h,h) \leq 0 \;\forall\, h \neq 0 \,.$$

Ja viimeisenä tapauksena, jos $\exists \, \lambda_r, \lambda_s$ s.e.

$$\lambda_r < 0 < \lambda_s \,,$$

niin $q(h,h)$ on indefiniitti.

Esim. i)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Om. arvot:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 9$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 9 = \lambda^2 - 3\lambda - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+28}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2} \quad \therefore \quad \begin{matrix} 3+\sqrt{37} > 0 \\ 3-\sqrt{37} < 0 \end{matrix}$$

$\therefore$ Neliömuoto

$$\langle Ah, h\rangle = 2h_1^2 + 6h_1h_2 + h_2^2$$

on indefiniitti

ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1$$

$$= \lambda(\lambda-2) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ tai } \lambda = 2.$$

Siis neliömuoto

$$\langle Ah, h\rangle = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2$$

on pos. semidefiniitti. Tämän olisi tietenkin nähnyt myös seuraavasti:

$$\langle Ah, h\rangle = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2 = (h_1+h_2)^2 \geq 0,$$

ja $\langle Ah, h\rangle = 0$ kun $h_1 = -h_2$.

iii) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 - 1$$

$$= \lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0 \iff$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$$

$\therefore$ A on pos. definiitti.

iv) Normaali neliö $h_1^2 + \dots + h_n^2 = \langle I_{n\times n} h, h\rangle$ on tietenkin pos. definiitti neliömuoto, ja ns. Lorentz-muoto

$$h_1^2 + \dots + h_n^2 - h_{n+1}^2$$

on esimerkki indefiniitistä neliömuodosta.

Nyt liittyen neliömuodon

$$\langle \nabla^2 f(x) h, h\rangle := \sum_{k,l=1}^{n} \partial_{kl} f(x) h_k h_l$$

käsitteeseen kohtien 1)–4) mukaan voimme sanoa f:stä kriittisessä pisteessä x (eli $\nabla f(x) = 0$) seuraavaa.

1) Jos $\nabla^2 f(x)$ on pos. definiitti, on x aito lokaali maksimi

2) -"- $\nabla^2 f(x)$ on neg. definiitti, on x aito lokaali minimi.

3) Jos $\nabla^2 f(x)$ on joko ~~indefiniitti tai~~ semi-definiitti, ei $\nabla^2 f$:n tarkastelemalla voi sanoa enempää käyttökelpoista kriittisessä pisteessä. Jos indef; ei ole ääriarvo.

Tutkitaan nyt esimerkkejä.

Esim. 1) $f(x_1,x_2) = 2x_1^3 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$, $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Nyt

$$\nabla f(x_1,x_2) = (6x_1^2 - 6x_2,\ 6x_2 - 6x_1) = 6(x_1^2 - x_2,\ x_2 - x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_1^2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1^2 - x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = 0 \text{ tai } x_1 = 1 \end{cases}$$

Siis f:n kriittiset pisteet ovat

$p_1 = (0,0)$ ja $p_2 = (1,1)$.

Lasketaan:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f & \partial_{12} f \\ \partial_{12} f & \partial_{22} f \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siis p_1:ssä:

$$\nabla^2 f(0,0) = 6 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

ja tämän ominaisarvot ovat

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -6 \\ -6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 156}}{2}$$

; tästä nähdään että om. arvot ovat erimerkkisiä, ja siis $\nabla^2 f(0,0)$ on indefiniitti neliömuoto $\rightsquigarrow$ ei lok. ääriarvo.

Taas p_2:ssa:

$$\nabla^2 f(1,1) = 6 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

ja ominaisarvot ovat

$$\begin{vmatrix} 12-\lambda & -6 \\ -6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda + 72 - 36 = \lambda^2 - 18\lambda + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 144}}{2} > 0$$

$\therefore$ Molemmat om. arvot > 0 $\rightsquigarrow$ kyseessä on lokaali minimi.

Kun $n = 2$, voi tämän nähdä suoraankin laskematta ominaisarvoja λ_1, λ_2:

Nyt matriisin $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ ominaisarvoille pätee

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \mathrm{tr}(A) & \text{"matriisin A jälki/trace"} \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det A \end{cases}$$

Siis, jos

a) $\lambda_1\lambda_2 = \det A > 0$ niin ominaisarvot ovat samanmerkkisiä & $\neq 0$, ja A on joko pos tai negat. definiitti.

- Jos $a_{11} > 0$, $\det A > 0$ $\Rightarrow$ A pos. def.
- Jos $a_{11} < 0$, $\det A < 0$ $\Rightarrow$ A neg. def.

b) Jos $\lambda_1\lambda_2 = \det A = 0$, niin joko $\lambda_1 = 0$ tai $\lambda_2 = 0$,

- Jos $\det A = 0$, on A semi-definiitti.

c) Jos $\lambda_1\lambda_2 < 0$, niin λ_1 ja λ_2 ovat eri merkkisiä,

- Jos $\det A < 0$, niin A on indefiniitti.

Soveltamalla tätä Hessen matriisiin $\nabla^2 f$ saamme seuraavat ehdot f:n käyttäytymiselle kriittisen pisteen

x_0 ympäristössä (nyt $n = 2$!)

1) Jos $\det \nabla^2 f(x_0) > 0$, $\partial_{11} f(x_0) > 0$ on Hessen matriisin määräämä neliömuoto pos. definiitti, ja kriittinen piste x_0 on aito lokaali minimi.

2) Jos $\det \nabla^2 f(x_0) > 0$, $\partial_{11} f(x_0) < 0$ on Hessen matriisin määräämä neliömuoto neg. definiitti ja kriittinen piste x_0 on aito lokaali maksimi.

3) Jos $\det \nabla^2 f(x_0) = 0$, niin Hessen neliömuoto on semi-definiitti pist. x_0, ja ääriarvokäyttäytymisestä ei voi sanoa mitään.

4) Jos $\det \nabla^2 f(x_0) < 0$, niin kriittinen piste x_0 on satulapiste, ja se ei ole lokaali ääriarvo.

Esim. i) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$.

$$\nabla f = (2x_1 + 4x_2,\ 4x_1 + 4x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0. \leftarrow \text{ainoa kriittinen}$$

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det \nabla^2 f(0,0) = 8 - 16 = -8 < 0$ ∴ origo ei ole lokaali ääriarvo.

ii) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^4$

$$\nabla f = (2x_1 + 4x_2,\ 4x_1 + 4x_2^3)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2^3 = 0 \end{cases}$$

∴ $x_2^3 - 2x_2 = 0$ ja $x_1 = -2x_2$

$\iff x_2(x_2^2 - 2) = 0$ ja $x_1 = -2x_2$

$$\iff \left.\begin{cases} x_2 = 0,\ x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{2},\ x_1 = -2\sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2},\ x_1 = 2\sqrt{2} \end{cases}\right\} \text{Kriittiset pisteet}$$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$:

$$\det \nabla^2 f(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

indef $\Rightarrow$ ei ääriarvo.

$(\mp 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$.

$$\det \nabla^2 f(\mp 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12\cdot 2 \end{vmatrix}$$

$$= 48 - 16 = 32 > 0.$$

Koska $\partial_{11} f = 2 > 0$ niin pisteissä $(\mp 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ on lokaalit minimit.

Katsotaan vielä seuraavia esimerkkejä:

Esim. a) $f(x_1,x_2) = e^{\|x\|^2} - x_1x_2$.

Kriittiset pisteet:

$$\nabla f(x_1,x_2) = 2x e^{\|x\|^2} - (x_2, x_1)$$

$$= (2x_1 e^{\|x\|^2} - x_2,\ 2x_2 e^{\|x\|^2} - x_1).$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 e^{\|x\|^2} - x_2 = 0 \\ 2x_2 e^{\|x\|^2} - x_1 = 0 \end{cases}$$

Siis $x_2 = 2x_1 e^{\|x\|^2}$ ja sij. tämä alempaan yht. jolloin

$$4x_1 e^{2\|x\|^2} - x_1 = 0 \iff x_1\left(4e^{2\|x\|^2} - 1\right) = 0$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2\|x\|^2 = \ln 1/4 < 0 \ ↯ . \end{cases}$$

Siis $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \therefore$ Ainoa kriittinen piste on origo.

Hessian origossa: $\partial_{11} f(x_1, x_2) = 2e^{\|x\|^2} + 4x_1^2 e^{\|x\|^2}$
$= 2e^{\|x\|^2}(1 + 2x_1^2)$

$\partial_{12} f(x_1, x_2) = -1$,

$\partial_{22} f(x_1, x_2) = 2e^{\|x\|^2}(1 + 2x_2^2)$.

Siis
$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2e^{\|x\|^2}(1+2x_1^2) & -1 \\ -1 & 2e^{\|x\|^2}(1+2x_2^2) \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

Nyt
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0,$$ siis neliömuoto on pos. def.

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow$$ origossa on lokaali minimi.

ii) $g(x_1, x_2, x_3) = e^{\|x\|^2} - x_2 x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Lasketaan ensin gradientti:

$\partial_1 g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 e^{\|x\|^2}$

$\partial_2 g(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 e^{\|x\|^2} - x_3$

$\partial_3 g(x_1, x_2, x_3) = 2x_3 e^{\|x\|^2} - x_2$

$$\therefore \nabla g = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 e^{\|x\|^2} = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 \\ x_3 = 2x_2 e^{\|x\|^2} \\ x_2 = 2x_3 e^{\|x\|^2} \end{cases}$$ kuten ed. esim. $\Rightarrow x_2 = x_3 = 0$.

Eli ainoa kriittinen piste on edelleen origo.

Sitten toiset derivaatat:

$\partial_{11} g(x) = 2e^{\|x\|^2} + 4x_1^2 e^{\|x\|^2} = 2e^{\|x\|^2}(1 + 2x_1^2)$

$\partial_{12} g(x) = 4x_1 x_2 e^{\|x\|^2}$, $\partial_{13} g(x) = 4x_1 x_3 e^{\|x\|^2}$

$\partial_{22} g(x) = 2e^{\|x\|^2} + 4x_2^2 e^{\|x\|^2}$, $\partial_{23} g(x) = 4x_2 x_3 e^{\|x\|^2} - 1$

$\partial_{33} g(x) = 2e^{\|x\|^2} + 4x_3^3 e^{\|x\|^2}$.

Siis

$$\nabla^2 g(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lasketaan om. arvot:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right)$$

$= 0 \iff \lambda = 2$ tai $(2-\lambda) = \pm 1 \iff \lambda = 2$ tai $\lambda = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

∴ Om. arvot ovat $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Siis

$\nabla^2 g(0)$ on pos. definiitti $\rightarrow$ origo on lokaali minimi.

2.11. Globaalit ääriarvot.

On hyödyllistä osata määrittää funktion lokaalit ääriarvot, mutta useimmiten sovelluksissa haluamme selvittää funktion absoluuttisen maksimin ja minimin. Tämä on hankalempaa.

Määr. 2.11.1. Olk. $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \to \mathbb{R}$.

Piste $x_M \in A$ on f:n globaali maksimi joukossa A, jos

$$f(x) \le f(x_M) \quad \forall \; x \in A.$$

Piste $x_m \in A$ on f:n globaali minimi joukossa A, jos

$$f(x) \ge f(x_m) \quad \forall x \in A.$$

Huom. Globaalia maksimia tai minimiä ei aina ole olemassa.

Esim. $A = (0, \infty) = \mathbb{R}_+$, $f(x) = 1/x$.

Nyt $\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \to \infty} f(x) &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\quad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

∴ f:llä ei ole globaalia maksimia tai minimiä joukossa $\mathbb{R}_+$.

Jos globaali maksimi tai minimi on, se ei aina ole yksikäsitteinen:

Esim. $A = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Kuten Analyysin kursseilla on osoitettu, niin yhden-muuttujan funktioille pätee: jos $\varphi : I \to \mathbb{R}$ on jva ja väli I on sulj. & raj. niin φ saavuttaa absoluuttisen maksiminsa ja miniminsä ainakin yhdessä pisteessä. Tämän tuloksen yleistäminen $\mathbb{R}^n$:ään vaatii sitä että osaamme analysoida funktion käytöstä $\mathbb{R}^n$:n avoimien joukkojen reunoilla: $\mathbb{R}^2$:ssa nämä ovat tyypillisesti "käyriä" ~"polkuja" ja $\mathbb{R}^3$:ssa taas pintoja.

2.12. Polut

Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli. Jatkuva kuvaus $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n$ on polku. Oletamme jatkossa että Δ on suljettu väli. Olkoot $\gamma_i : \Delta \to \mathbb{R}$ kuvauksen γ koordinaattifunktiot, siis

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)), \quad t \in \Delta .$$

Jos jokainen koordinaattifunktio γ_i on derivoituva välillä Δ (toispuoleisesti päätepisteissä), ja derivaatat ovat jatkuvia, sanomme että γ on differentioituva polku (Merk: $\gamma \in C^1([a,b])$, $C^1(\Delta)$).

Edelleen, määritellään tällöin

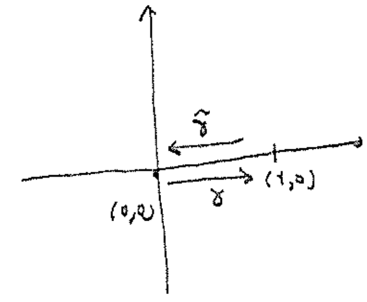
$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)) .$$

γ' on polun derivaatta.

Esim. i) $\gamma(t) = (t, 0)$, $0 \le t \le 1$.

Tämä on siis jana pist. $(0,0)$ pist. $(1,0)$ suunnistettuna vasemmalta oikealle,

ii) $\tilde{\gamma}(t) = (1-t, 0)$, $0 \le t \le 1$. Tämä on jana pist. $(1,0)$ pist. $(0,0)$



iii) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Tämä on yksikköympyrän $x_1^2 + x_2^2 = 1$ kehä suunnistettuna vastapäivään, eli positiivisesti.

iv) $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$; $0 \le t \le 2\pi$

Ellipsi!

Olk. $\Delta = [a,b]$, sanomme että polku $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n$ on suljettu (tai umpinainen), jos $\gamma(a) = \gamma(b)$;

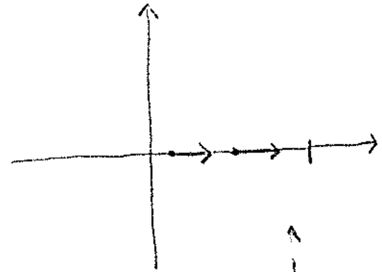
Polut esim. iii) – iv) ovat umpinaisia.

Olk. $t \in \Delta$. Vektori

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

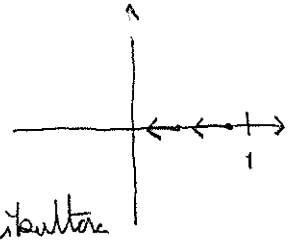
on polun γ <u>tangentti</u> pisteessä $\gamma(t)$, eli tangentti parametrin arvolla t.

<u>Esim.</u> i) $\gamma(t) = (t, 0)$; Tällöin $\gamma'(t) = (1, 0)$.



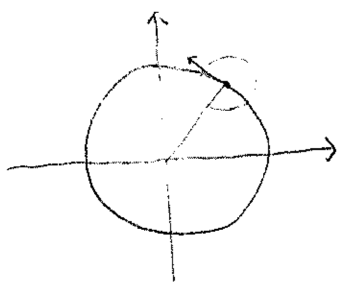
ii) $\gamma(t) = (1-t, 0)$;

Tällöin $\gamma'(t) = (-1, 0)$.



Huomaa, että polun suunnistus vaikuttaa tangentin suuntaan!

iii) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

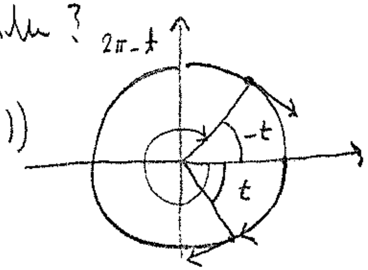


iv) $\tilde{\gamma}(t) = (\cos(-t), \sin(-t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Polun kuvajoukko on edellinen ympyrän kehä, mutta nyt suunnistettuna myötäpäivään.

Mitä tapahtuu tangentille?

$$\tilde{\gamma}'(t) = (\sin(-t), -\cos(-t))$$



Huomatkee, että

$$(☺)\quad \tilde{\gamma}'(2\pi - t) = \left(\sin(-(2\pi - t)), -\cos(-(2\pi - t))\right)$$

$$= (-\underbrace{\sin(2\pi - t)}_{=\sin(-t)}, -\cos(2\pi - t))$$

$$= (\sin t, -\cos t) = -\gamma'(t).$$

Pisteet $\tilde{\gamma}(2\pi - t)$ ja $\gamma(t)$ vastaavat saman kehän pistettä;

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\tilde{\gamma}(2\pi - t) = (\cos(-(2\pi - t)), \sin(-(2\pi - t)))$$

$$= (\cos(2\pi - t), -\sin(2\pi - t)) = (\cos t, \sin t).$$

mutta tähän pisteeseen piirretyt tangenttivektorit ovat toistensa <u>vastavektoreita</u> ((☺)).

Myös "nopeus", jolla piste $\gamma(t)$ liikkuu pitkin polkua vaikuttaa tangenttiin:

Esim. Tarkastellaan edelleen yksikköympyrän kehää $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Parametrisoidaan se nyt

$$\underline{\gamma}(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), \quad 0 \le t \le \pi .$$

Kuljemme nyt kehän "kokonaisajan" π aikaisemman 2π:n sijasta

$$\underline{\gamma}'(t) = (-2\sin(2t), 2\cos(2t)) = 2(-\sin(2t), \cos(2t)).$$

Nyt taas

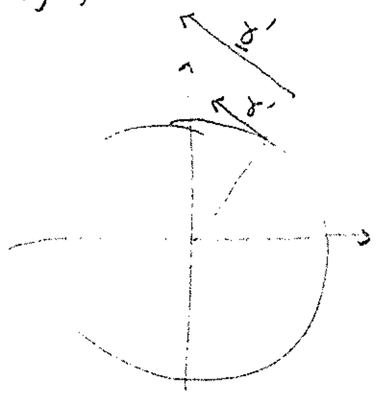
$$\underline{\gamma}(t) = \gamma(2t),$$

ja taas

$$\gamma'(2t) = (-\sin(2t), \cos(2t)),$$

eli

$$\underline{\gamma}'(t) = 2\gamma'(2t).$$



Fysikaalisesti γ' on nopeusvektori pisteessä $\gamma(t)$;

$|\gamma'(t)|$ on nopeuden suuruus.

Esim. Olk. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ diffu.

Tällöin

$$\gamma: [a,b] \ni t \mapsto (t, f(t))$$

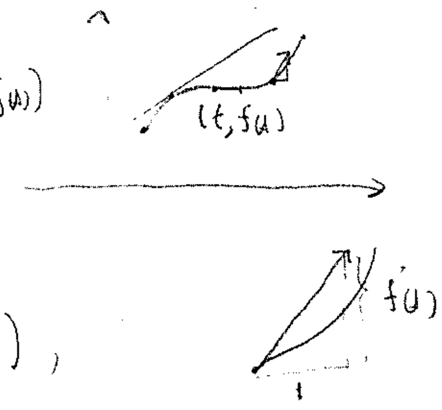
määrää $\mathbb{R}^2$:n diff.van polun (~ f:n kuvaajan parametrisoitu esitys)

Edelleen,

$$\gamma'(t) = (1, f'(t))$$

pist $(t, f(t))$

Tangenttivektori määrää siis suoran



$$s \mapsto (\underbrace{s+t}_{=x}, \underbrace{f(t) + sf'(t)}_{=y}),$$

eli eliminoimalla s saadaan

$$s = x - t$$

$$y = f(t) + sf'(t) = f(t) + (x-t)f'(t)$$

$$\therefore \quad y - f(t) = f'(t)(x-t)$$

eli pisteen $(t, f(t))$ kautta kulkeva suora, jolla kulmakerroin $f'(t)$.

2.13 Pinnat

Polut parametrisoitiin $\mathbb{R}$:n osajoukoille, pinnat vastaavasti $\mathbb{R}^2$:n osajoukoilla. Huom. Tarkastelemme jatkossa vain 2-ulotteisia pintoja $\mathbb{R}^3$:ssa. Vastaavat tulokset & määritelmät on helppo yleistää $(n-1)$-ulotteisille pinnoille $\mathbb{R}^n$:ssä, eli ns. hyperpinnoille.

Olk. $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin; jatkuva funktio

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3$$

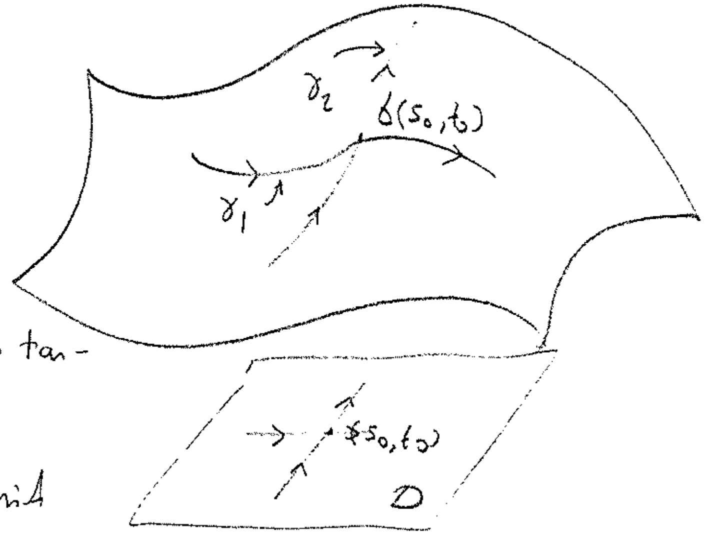
on (parametrisoitu) pinta. Funktiot $\sigma_i(s,t)$, $i = 1,2,3$,

$$\sigma(s,t) = (\sigma_1(s,t), \sigma_2(s,t), \sigma_3(s,t))$$

ovat pinnan koordinaattifunktiot. Ol. että koord fkt:t σ_i ovat differentioituvia. Olkoon $(s_0,t_0) \in D$ ja tarkastellaan pintaa σ pisteen $\sigma(s_0,t_0)$ ympäristössä: Kun kiinnitämme joko s:n tai t:n, saamme kaksi käyrää/polkua:

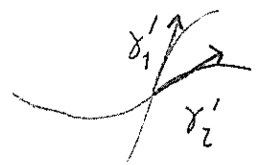
$$\gamma_1(s) = \sigma(s,t_0), \quad s \text{ läh. } s_0\text{:aa}$$
$$\gamma_2(t) = \sigma(s_0,t), \quad t \text{ läh. } t_0\text{:aa}$$

Näille poluille on tangenttivektorit $\gamma_1'(s)$ ja $\gamma_2'(t)$.

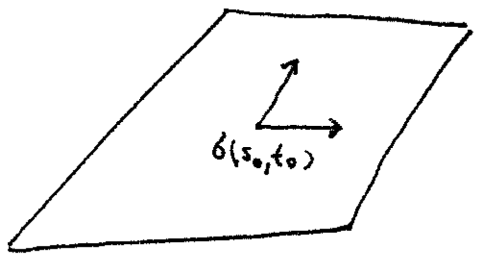


Ol. että σ on säännöllinen pisteessä (s_0,t_0): tämä tarkoittaa että tangenttivektorit $\gamma_1'(s_0)$ ja $\gamma_2'(t_0)$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

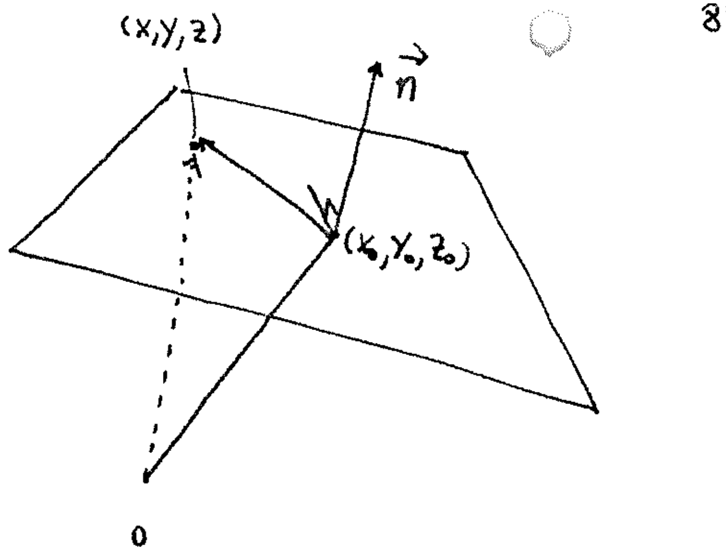
Nämä määräävät pisteen $\sigma(s_0,t_0)$ kautta kulkevan



tason $T(s_0,t_0)$, jota kutsutaan σ:n tangenttitasoksi pisteessä



Kuten toivottavasti muistatte, tason yhtälö on kätevintä ilmaista normaalin avulla:



Olkoon $\vec n$ tason normaali, (x_0, y_0, z_0) piste jonka kautta taso kulkee. Kuvasta on selvää että $p=(x,y,z)$ kuuluu tasoon $\Leftrightarrow$

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \perp \vec n, \quad \vec n = (n_1, n_2, n_3)$$

eli

$$n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0 .$$

Kuinka määräämme normaalin $\vec n$? Jos tunnemme tason tangenttivektorit T_1 ja T_2 niin

$$\vec n = T_1 \times T_2 \quad (\text{ristitulo}) :$$

Jos

$$T_1 = (T_{1,1}, T_{1,2}, T_{1,3})$$

$$T_2 = (T_{2,1}, T_{2,2}, T_{2,3})$$

niin

$$\vec n = T_1 \times T_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & T_{2,3} \end{vmatrix}$$

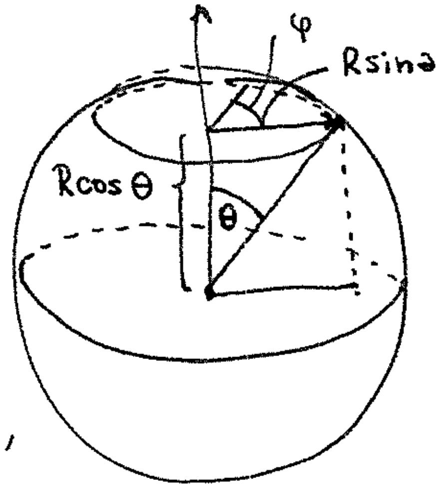
$$= \left(T_{1,2}T_{2,3} - T_{1,3}T_{2,2},\ T_{1,3}T_{2,1} - T_{1,1}T_{2,3},\ T_{1,1}T_{2,2} - T_{1,2}T_{2,1} \right)$$

Esim. Tark. R-säteisen origokeskisen $(R>0)$ pallon $\mathbb{R}^3$:ssa,

$$r = (r_1, r_2, r_3) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta).$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \theta \le \pi$



Siis

$$D = [0, 2\pi] \times [0, \pi],$$

$$\sigma(\varphi, \theta) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta),$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = (-R\sin\theta\sin\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, \overset{0}{\cancel{R\cos\theta}}) \leftarrow \text{tangenttivektorit}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, -R\sin\theta) \swarrow$$

Normaali on

$$\vec{n} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}\,(-R^2\sin^2\theta\cos\varphi) + \bar{j}\,(-R^2\sin^2\theta\sin\varphi)$$

$$+ \bar{k}\left(-R^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - R^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\right)$$

$$= (-R^2\sin^2\theta\cos\varphi)\vec{i} + (-R^2\sin^2\theta\sin\varphi)\vec{j}$$

$$-(R^2\sin\theta\cos\theta)\vec{k}$$

$$= -R\sin\theta\left(R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta\right)$$

$$= -R\sin\theta\ \sigma(\varphi,\theta),$$

eli normaali on radiusvektorin $\sigma(\varphi,\theta)$ suuntainen (Huom. tämä pätee myös kun $\sin\theta = 0$, eli $\theta = 0, \pi$) vaikka kemmin $R\sin\theta = 0$ tällöin; HT).

Lasketaan nyt esim. pisteeseen

$$\sigma\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(R\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},\ R\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},\ R\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \frac{R}{2}(1, 1, \sqrt{2})$$

piirretyn tangentti-tason yhtälö: valitaan

$$\vec{m} = (1, 1, \sqrt{2}).$$

Siis

$$\begin{cases} x_0 = R/2 = y_0, \\ z_0 = R/\sqrt{2} \end{cases}$$

Eli yhtälö on

$$0 = 1\cdot(x - R/2) + 1\cdot(y - R/2) + \sqrt{2}(z - R/\sqrt{2})$$

$$= x + y + \sqrt{2}z - (R + R)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x + y + \sqrt{2}z = 2R}$$

2.14. Käänteiskuvauslause ja sen sovelluksia

Pinnat määrätään usein ns. implisiittisessä muodossa, esim. e.o. pallon yhtälö on $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$.

Jotta osaisimme näyttää että tämä lokaalisti määrää $\mathbb{R}^n$:n pinnan tarvitsemme ns. käänteiskuvauslausetta. Tämä on yksi $\mathbb{R}^n$:n analyysin peruskivistä. Aloitetaan määrittelemällä diffeomorfismi:

Määr. 2.14.1. Kuvaus $f: D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ avoimia, on diffeomorfismi jos

i) f on diff:a

ii) $\exists$ käänteiskuvaus $f^{-1}: D' \to D$ (eli $f \circ f^{-1} = id_{D'}$, $f^{-1} \circ f = id_D$)

iii) f^{-1} on diff:a D':ssa.

Esim. a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$ on diffeo:

i) $f'(x) = e^x$, $f'' = e^x$ jne...

ii) $f^{-1}(t) = \ln t$, $t > 0$ (siis $e^{\ln t} = t$, $\ln(e^x) = x$)

iii) $(f^{-1})'(t) = 1/t$, $t > 0$.

b) differentioituvan fkt:n käänteiskuvauksen ei tarvitse olla diff:a: olkoon

$$g(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tällöin

$$g'(x) = 3x^2,$$

joten g diff:a. Edelleen,

$$(g^{-1})(t) = t^{1/3}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \left(\text{siis } (g^{-1})(t) = \begin{cases} t^{1/3}, & t \geq 0 \\ -|t|^{1/3}, & t < 0 \end{cases} \right)$$

mutta

$$(g^{-1})'(t) = \frac{1}{3} t^{-2/3}, \quad t \neq 0$$

$\to \infty$, kun $t \to 0$ | (g^{-1}) ei ole diff:a.

Yleisistä $\mathbb{R}^n$:n funktioista voi olla hyvin vaikeaa nähdä ovatko ne (globaaleja) diffeomorfismeja. Siksi määrittelemme heikomman käsitteen:

Määr. 2.14.2. Olkoon $f: D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ avoimia. Funktio f on lokaali diffeomorfismi pisteen $x_0 \in D$ ympärillä, jos $\exists$ x_0:n ympäristö U ja $f(x_0) = y_0$:n ympäristö V s.e.

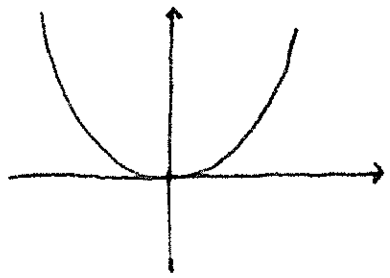
$$f|_U : U \to V$$

on diffeomorfismi.

Katsotaan taas esimerkkejä:

<u>Esim.</u> a) Jokainen diffeo on luonnollisesti lokaali diffeo.

b) Olk. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=x^2$. Missä pisteissä f on lokaali diffeomorfismi?



Nyt

$f(x)=t\geq 0$

$\Leftrightarrow$ $x=\pm\sqrt{t}$, eli f ei ole injektio. Kuitenkin, jos

$x_0>0$,

niin välillä $(0,\infty)\ni x_0$ $f|_{\mathbb{R}_+}$ on injektio

Valitaan siis

$$U=(0,\infty),\ V=\mathbb{R}_+=(0,\infty)\ni y_0=x_0^2.$$

Tällöin $(f|_{\mathbb{R}_+})^{-1}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $t\mapsto\sqrt{t}$

on diffeo. Samoin jos

$x_0<0$,

niin olk.

$$U=(-\infty,0)=\mathbb{R}_-,\ V=\mathbb{R}_+,$$

Siis

$(f|_{\mathbb{R}_-}):U\to V$

käänteiskuvaus on $t\mapsto\sqrt{-t}$.

Sen sijaan origossa f ei ole lokaali diffeo: f ei ole edes injektio missään origon ympäristössä!

Onko olemassa yksinkertaista tapaa tarkistaa milloin f on lokaali diffeo?

Mietitäänpä hieman: ol. U on x_0:n ympäristö, V taas $y_0=f(x_0)$:n ympäristö s.e.

$$f|_U:U\to V,\quad (f|_U)^{-1}:V\to U$$

ovat diffejä.

Siis

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x,\quad x\in U,$$
$$(f\circ f^{-1})(y)=y,\quad y\in V,$$

joten ketjusääntö $\Rightarrow$

$$\begin{cases}(f^{-1})'(f(x))\,f'(x)=\mathbb{I}\\ f'(f^{-1}(y))\,f'(y)=\mathbb{I}\end{cases}\ \overset{y=f(x)}{\underset{f^{-1}(y)=x}{\Leftrightarrow}}\ \begin{cases}(f^{-1})'(y)\,f'(x)=\mathbb{I}\\ f'(x)(f^{-1})'(y)=\mathbb{I},\end{cases}$$

$x\in U,\ y\in V$.

Siis matriisit $f'(x)$ ja $(f^{-1})'(f(x))$ ovat kääntyviä ja toistensa käänteismatriiseja.

Erityisesti $\boxed{\det f'(x_0)\neq 0.}$

Tämä on riittävä ja välttämätön ehto.

Teor. 2.14.3. (Käänteiskuvauslause)

Ol. $f : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ avoimia, on diff.

f on lokaali diffeo pist. $x_0 \in D \iff \det f'(x_0) \neq 0$.

Huom. Tästä ei seuraa että f on globaali diffeo:

esim. $f(x) = x^2$, $x \neq 0$.

Esim. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

$$f'(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2) = 0 \iff x = y = 0.$$

Siis f on lokaali diffeo kaikkialla muualla paitsi origossa.

Käänteiskuvauslauseella on seuraava tärkeä seuraus:

Teor. 2.14.4 (Implisiittifunktioteoreema)

Ol. $f : D \to \mathbb{R}$ C^1-kuv., $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f(x_0) = 0$.

Jos $\partial_k f(x_0) \neq 0$, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$

niin merk. $x' = (x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \subset \mathbb{R}^{n-1}$,

on olemassa pisteen x_0' ymp. $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ja C^1-kuvaus $\varphi : U \to \mathbb{R}$ s.e.

i) $x_{0k} = \varphi(x_0')$

ii) Jos. x_0:n ymp. $f(x) = 0 \iff x_k = \varphi(x')$.

Tolemme siis ratkaisseet muuttujan x_k yhtälöstä $f(x) = 0$ ⌋

Esim. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Nyt $f(x,y) = 0 \iff x^2 + y^2 = 1$ ← ympyrän kehä.

Ed.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y \end{cases}$$

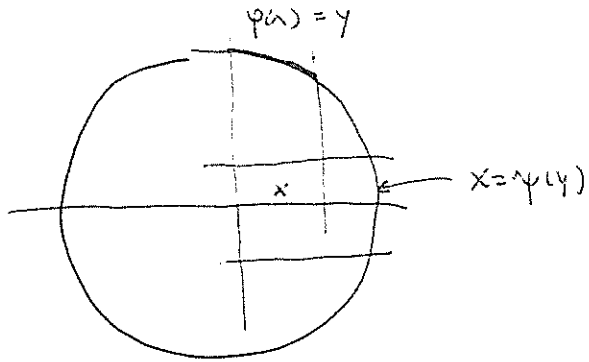
Siis kun $x \neq 0$ voimme ratkaista yksik. x:n

$$x = \pm\sqrt{1 - y^2} \qquad \begin{cases} + : x > 0 \\ - : x < 0 \end{cases}$$ ← origon ympäristö ei ole.

Kun $y \neq 0$ voimme

taas on.

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \quad \begin{cases} +, & y>0 \\ -, & y<0 \end{cases}$$



Siis jos $\nabla f(x_0) \neq 0$, niin pisteen x_0 ympäristössä yht. $f(x)=0$ määrää pinnan $x_k=\varphi(x')$, joten saamme tangenttivektorit, kun tunnemme φ:n ja sen derivaatat! ↑ parametrisointi! pinnalle

- Kun $n=2$, käyrä on ~~[illegible]~~ kaari.
- Kun $n=3$, kyseessä on $\mathbb{R}^3$:n pinta.

φ:n määrääminen voi olla lähes mahdotonta, mutta sen derivaatat saadaan ratkaistua helpolla käyttäen ns. implisiittistä derivointia:

~~[illegible]~~ Olkoon $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$.

Ol. yleisyyt. vuoksi $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$.

Tällöin (x_0,y_0):n ympäristössä

$$f(x,y)=0 \iff y=\varphi(x).$$

Eli

$$f(x,y)=0 \iff f(x,\varphi(x))=0, \quad \varphi(x_0)=y_0.$$

Siis x_0:n ympäristössä

$$0 = \frac{df}{dx} f(x,\varphi(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x),$$

Kun $x=x_0$, niin $\varphi(x)=\varphi(x_0)=y_0$, ja saamme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\varphi'(x_0)$$

$$\iff \boxed{\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}} \leftarrow \neq 0$$

Ei tarvitse ratkaista φ:tä

Esim. $f(x,y) = x^2+2y^2-2$.

Määrää pisteeseen $(0,1)$ piirretyn tang. suoran yhtälö.

Nyt $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$,

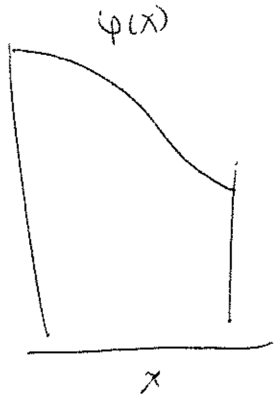
$f(x_0,y_0) = f(0,1) = 2-2 = 0$, eli $f(x_0,y_0)=0$.

Nyt
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y \neq 0 \text{ kun } y \neq 0.$$

Eli pisteen $x=0$ ympäristössä on olemassa φ s.e.

$$y = \varphi(x), \qquad \varphi(0) = 1$$

ja $\quad y = \varphi(x) \iff f(x,y) = 0.$



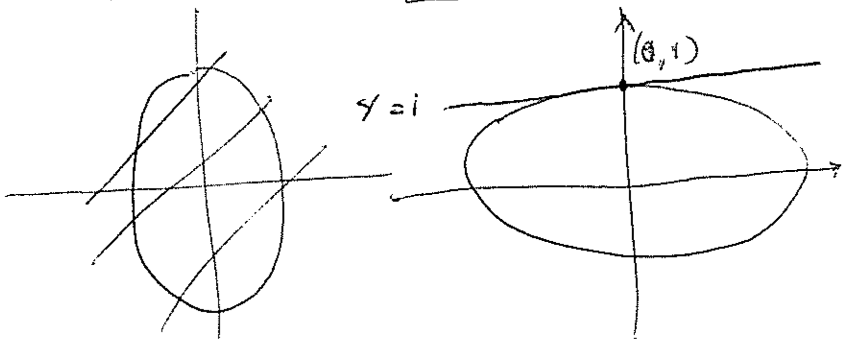
Pist. x_0 piir. tangentin kulmakerroin on $\varphi'(x_0)$, ja tang. yhtälö on siis

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0).$$

Nyt $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Ja impl. deriv. $\Rightarrow$

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \partial f/\partial y = \frac{-2x_0}{4y_0} = 0$$

Siis $\varphi'(x_0) = 0$ ja yht on $\boxed{y = 1}$



Samoin voidaan toimia kun $n = 3$.

Ol. $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Siis $\exists$ $\varphi(x,y)$ (x_0, y_0):n ympäristössä s.e.

$$z = \varphi(x,y) \iff f(x,y,z) = 0.$$

Eli
$$f(x, y, \varphi(x,y)) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\partial f/\partial x \Big/ \partial f/\partial z}$$

Ja samoin

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\partial f/\partial y \Big/ \partial f/\partial z}$$

Pisteessä (x_0, y_0, z_0) pinnalla tangentit ovat vektorien

$$\tau_1 = (1, 0, -\partial f/\partial x \big/ \partial f/\partial z)$$

$$\tau_2 = (0, 1, -\partial f/\partial x \big/ \partial f/\partial z)$$

juntaisia, ja normaali $= n = T_1 \times T_2$. 95

Esim. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 e^z - 2$.

Laske pist. $(1,1,0)$ piirretyn tang. tason yht. pinnalle $x^2 + y^2 e^z - 2 = 0$.

Huom. $f(1,1,0) = 1 + 1 \cdot e^0 - 2 = 2 - 2 = 0$. Siis piste on pinnalla.

Edelleen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 e^z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = 1 \neq 0,$$

eli $f = 0$ määrää pinnan pist $(1,1,0)$ kautta.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y e^z.$$

Siis pist. $(1,1,0)$

$$T_1 = (1, 0, -2/1) = (1, 0, -2)$$

$$T_2 = (0, 1, -2/1) = (0, 1, -2),$$

ja normaali on

$$n = (1,0,-2) \times (0,1,-2)$$

96

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2, 2, 1)$$

Siis tang. taso on

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) + 2(y-1) + 1 \cdot (z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2x + 2y + z - 4 = 0}.$$

2.15. Sidotut ääriarvot ja Lagrangen kertoimet

Tarkastellaan seuraavan ääriarvo-ongelmaa:

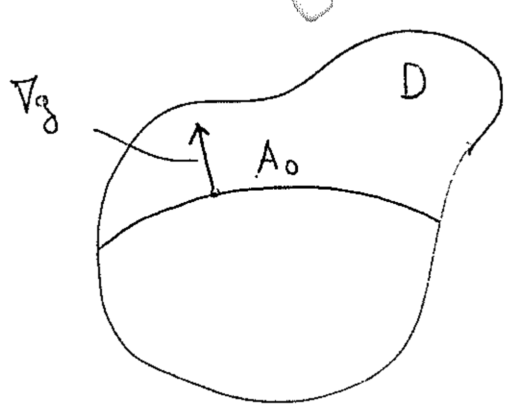
> Määrää funktion $f : A \to \mathbb{R}$
> abs. maksimi ja minimi ~~koko A:ssa~~ joukossa
> $A_0 \subset A$.

Tarkastelemme aluksi tilannetta tasossa: olk. $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin; haluamme määrätä

f:n maksimin ja minimin joukossa

$$A_0 = \{(x,y) \in D ;\ g(x,y) = 0\}.$$

Tässä $f, g \in C^1(D)$



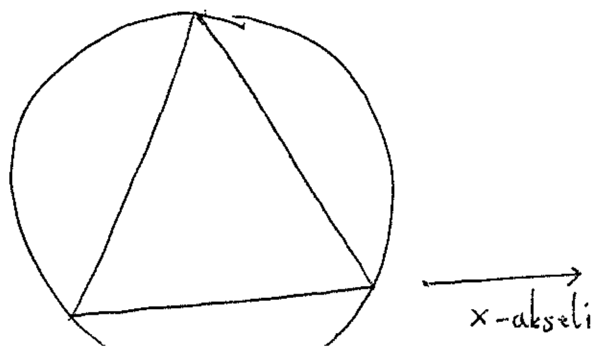
Ol. että $(x_0, y_0) \in A_0$ ja $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$

<u>Lause</u> (Lagrangen kertoimet) Ol. $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin, A_0, f, g kuten yllä. Jos funktiolla $f: A_0 \to \mathbb{R}$ on lokaali ääriarvokohta pisteessä $(x_0, y_0) \in A_0$ ja $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, niin jollain $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee

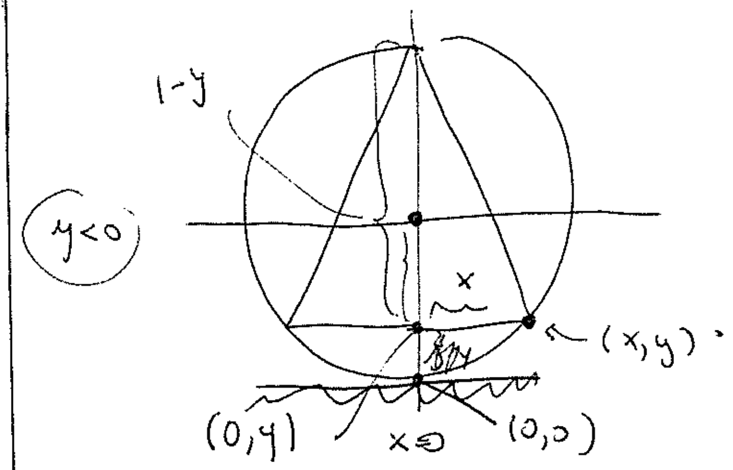
$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

"Todistamme" tämän myöhemmin: katsotaan aluksi esimerkki:

<u>Esim</u> Piirretään yks. ympyrän sisään tasa~~sivuinen~~ kolmio kylkinen, jonka kanta



on x-akselin suuntainen. Määrää tämän kolmion suurin mahdollinen pinta-ala.



Kolmion ala

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \cdot 2x(1-y) = x(1-y), \quad x \geq 0.$$

Lisäksi (x,y) on yks. ympyrän kehällä:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Siis $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $D = \{(x,y);\ x > 0\}$.

$$A_0 = \{(x,y);\ x > 0,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Nyt

$$\nabla f(x,y) = (1-y, -x),$$

Appendix: Implisiittifunktiolauseen todistus:

Ol. $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x_{01}, \dots, x_{0n}) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, \dots, x_{0n}) \neq 0 .$$

Määr.

$$F : D \to \mathbb{R}^n, \quad F(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f(x_1, \dots, x_n) \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Nyt

$$F'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} .$$

$\det F'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, \dots, x_{0n}) \neq 0$, siis $\exists\, G = F^{-1}$.

Merk. $u = f(x)$. Siis $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix}$, ja

$$x_1 = G_1(u, x_2, \dots, x_n),$$

ja $f(x) = 0 \iff u = 0 \iff x_1 = G_1(0, x_2, \dots, x_n) = \underline{\varphi(x_2, \dots, x_n)}.$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$.

Siis

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, $g(x,y)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(2x,2y) = (1-y,-x) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-y-2\lambda x = 0 \\ +2\lambda y + x = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\cancel{\Rightarrow 1-y-2\lambda^2 y = 0}$

$\cancel{\Rightarrow x = 2\lambda y}$

$\cancel{\therefore\ 1-(1+4\lambda^2)y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{1+4\lambda^2}}$

Eliminoidaan tästä yhtälöstä λ:

1. yhtälö: $\lambda = \dfrac{1-y}{2x}$.

Sij. toiseen:

$$2\cdot\left(\frac{1-y}{2x}\right)y + x = 0$$

$\Leftrightarrow (1-y)y + x^2 = 0$, $x>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + y = 0 \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

$2y^2 - y = 1 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0$

$$y = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2\cdot 2} = \frac{1\pm 3}{2\cdot 2} = \begin{cases} 1 & \text{ei käy.} \\ -1/2 \end{cases}$$

Siis $\boxed{y=-1/2}$, $x^2 = 1-y^2 = 3/4 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Tämä on ainoa mahd. lok. ääriarvo.

(geom. itsestään selvä).

Joukko $x^2+y^2=1$, $x\geq 0$ on sulj. & raj.

$\Rightarrow \exists$ abs. maksimi f:llä; $f \geq 0$.

Ja $f(0,1) = f(0,-1) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ on

lok. maksimi.

Perustellaan, miksi Lagrangen kertoimien menetelmä toimii: Tarkastellaan joukkoa

$$A_0 = \{ g(x,y) = 0 \}.$$

Ol. $\nabla g \neq 0$ kun $g = 0$. Tällöin ∇g on käyrän $\gamma: g = 0$ normaali: Olk.

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

γ:n jokin parametrisointi. Nyt

$$g(x(t), y(t)) = 0 \quad \forall t,$$

joten

$$0 = \frac{d}{dt} g(x(t), y(t)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t) = \langle \nabla g(x(t), y(t)), \underbrace{(x'(t), y'(t))}_{\text{tangentti}} \rangle$$

Siis

$$\nabla g \perp (x', y'),$$

eli ∇g on käyrän / kaaren $\{\gamma : g = 0\}$ normaalin suuntainen. Oletetaan nyt että $\nabla g \neq 0$, kun $g = 0$; esim. $\partial g / \partial y \neq 0$.

Kaari ~~Pinta~~ $\{g = 0\}$ voidaan esittää siis pisteen (x_0, y_0) ympäristössä muodossa

$$y = \varphi(x);$$

eli parametriesitys on

$$x \mapsto (x, \varphi(x)),$$

ja tangenttivektori on

$$T(x) = (1, \varphi'(x));$$

ja siis normaali on

$$n(x) = (\varphi'(x), -1).$$

Ol. että piste (x_0, y_0) on funktion $f|_{A_0}$ ääriarvo. Eli

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\, \varphi'(x)$$

$$= \langle \nabla f(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle$$

Siis $\nabla f \perp T(x)$,

eli $\nabla f \parallel n(x)$,

eli on olemassa $\mu \neq 0$ s.e.

$$\nabla f = \mu \cdot n,$$

ja siten $\exists \lambda \neq 0$ s.e.

$$\nabla f = \lambda \nabla g,$$

kuten väitettiin. $\square$

Esim. Määrättävä joukon

$$A_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x^2 y = 16\}$$

lyhin etäisyys origoon, ja ne pisteet joissa se saavutetaan.

Ratk. On siis minimoitava funktio $\sqrt{x^2+y^2}$ joukossa A_0. Koska $\sqrt{x^2+y^2}$ ja x^2+y^2 saavuttavat minimin samoissa pisteissä, voimme yhtä hyvin minimoida funktion

$$f(x,y) = x^2+y^2,$$

tämä on helpompaa laskujen kannalta. Nyt

$$\nabla f = (2x, 2y)$$

$$\nabla g = (2xy, x^2) \qquad (g(x,y) = x^2y - 16)$$

Siis

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad x^2 y = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda 2xy \\ 2y = \lambda x^2 \\ x^2 y = 16 \end{cases} \qquad \overset{"}{\Rightarrow} x, y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1/y \\ 2y^2 = x^2 \\ x^2 y = 16 \end{cases} \Rightarrow \quad 2y^3 = 16 \Rightarrow y^3 = 8 \Leftrightarrow \underline{y = 2}$$

$$\text{eli} \quad x^2 = \frac{16}{2} = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Siis mahdolliset ääriarvopisteet ovat $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$.

Jompikumpi näistä on globaali min.:
(tai molemmat)

Näillä pisteillä on ilmeisesti sama etäisyys origoon:

$$d^2 = 8 + 4 = 12 \Leftrightarrow \underline{\underline{d = 2\sqrt{3}}}$$

Esim. Määritä pisteet (x,y), joissa funktio

$$f(x,y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2$$

saa suurimman ja pienimmän arvonsa yksikkökiekossa

$$\bar{B}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Ratk. f saa glob. ääriarvonsa joko

a) gradientin 0-kohdissa joukossa $B(0,1)$

$= \{(x,y) \,;\, x^2+y^2<1\}$

b) Reunalla $\{x^2+y^2=1\}$.

a) Gradientin 0-kohdat:

$$\nabla f = (16x-12y,\ -12x+34y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x-12y=0 \\ -12x+34y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0.$$

Nyt

$$\boxed{f(0,0)=0}$$

b) Haetaan f:n ääriarvot joukossa $\{g(x,y)=0\}$,

$g(x,y) = x^2+y^2-1$.

$$\nabla f = (16x-12y,\ -12x+34y),$$

$$\nabla g = (2x,\ 2y).$$

Eli Lagrange ⇒

$$\begin{cases} 16x-12y = 2\lambda x \\ -12x+34y = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

~~Siis, jos $x\neq 0$ niin~~

$$\cancel{\lambda = 8-\frac{6y}{x},}$$

~~ja saamme~~

$$\cancel{-12x+34y = 2\left(8-\frac{6y}{\ldots}\right.}$$

Eli kertomalla puolittain x:llä ja y:llä ylemmät yht.

$$\begin{cases} 16xy-12y^2 = 2\lambda xy \\ -12x^2+34xy = 2\lambda xy \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

ja siis

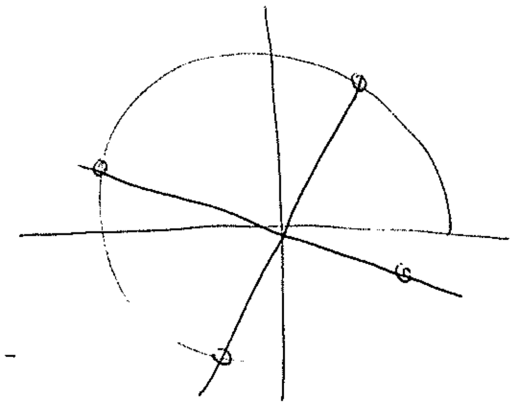
$$\begin{cases} 16xy-12y^2 = -12x^2+34xy \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$12x^2 - 12y^2 - 18xy = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - y^2 - \frac{3xy}{2} = 0}$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)\left(x + \frac{y}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ \text{tai} \\ x = -y/2. \end{cases}$$



Pist. $x = 0$ tai $y = 0$ eivät tuk. kysymykseen.

$x = 2y$, $x^2 + y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow 5y^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{y = \pm 1/\sqrt{5}.} \quad \boxed{x = \pm 2/\sqrt{5}}$$

$$f(\pm 2/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}) = f(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$$

$$= 8 \cdot \frac{4}{5} - \frac{12 \cdot 2}{5} + \frac{17}{5}$$

$$= \frac{32 - 24 + 17}{5} = \frac{25}{5} = 5.$$

~~Ab~~

$$x = -y/2 \Leftrightarrow y = -2x$$

$$1 = x^2 + y^2 = 5x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{5} \Leftrightarrow y = \mp 2/\sqrt{5}.$$

Siis

$$f(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}) = \frac{8}{5} + \frac{12 \cdot 2}{5} + \frac{17 \cdot 4}{5}$$

$$= \frac{8 + 24 + 68}{5} = \frac{100}{5} = 20 \leftarrow \text{Maks.}$$

$\therefore$ Maksimiarvo $= 20$; pist. (x,y) $(\pm 1/\sqrt{5}, \mp 2/\sqrt{5})$

Minimi- " $= 0$; pisteessä $(x,y) = (0,0)$.

3. INTERGOINTI TASOSSA

3.0 Kertaus: Riemann-integraali $\mathbb{R}$:ssä

Olkoon $f: I \to \mathbb{R}$ jva, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ kohti väli. Palautetaan mieliin, kuinka määrittelimme integraalin

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Jaetaan väli I suljettuihin osaväleihin $I_1, \ldots, I_N$;

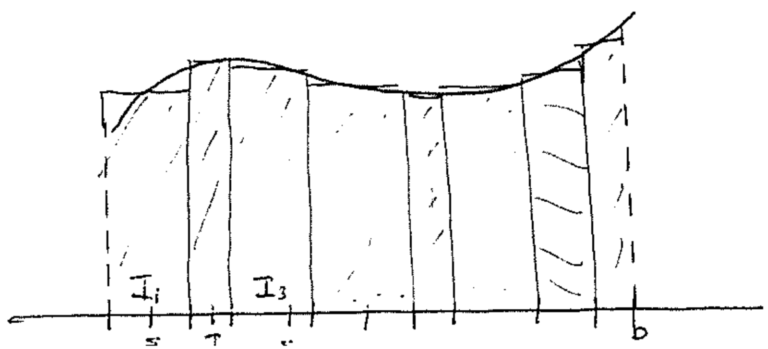
$$I_k = [a_k, b_k];$$

missä $b_k = a_{k+1}$: Siis $I = \bigcup_{k=1}^N I_k$; merk. $\delta = \sup_k |I_k| = \sup_k |b_k - a_k|$,

ja valitaan $\xi_k \in I_k$. Summa

$$S(f, \{I_k\}) := \sum_k f(\xi_k)\,|I_k| = \sum_k f(\xi_k)\,|b_k - a_k|$$

on jakoon $\{I_k\}$ liittyvä Riemannin summa.



Siis $S(f, \{I_k\})$ on approksimaatio f:n kuvaajan ja x-akselin sekä janojen $x = a, b$ raj. alueen pinta-alalle; ainakin kun $f \geq 0$.

Jos on olemassa pisteiden $\{\xi_k\}$ ja jakoväleistä riippumaton raja-arvo

$$\lim_{\delta \to 0} S(f, \{I_k\}),$$

merkitsemme sitä $\int_a^b f(x)\,dx$:llä; tämä on f:n integraali (Riemann-integraali) yli välin $[a,b]$.

3.1. Integraali tason suorakaiteiden yli

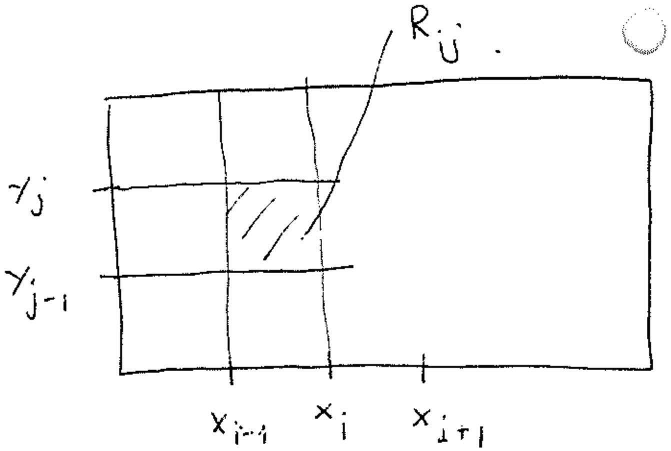
Pyrimme nyt yleistämään tämän $\mathbb{R}^n$:n joukkoihin. Aloitamme tason $\mathbb{R}^2$ suorakaiteista

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}.$$

- Tason D jako l. ositus on välien $[a,b]$ ja $[c,d]$ jakojen määräämä:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d.$$



olk. $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

Suorakaiteen R_{ij} pinta-ala on

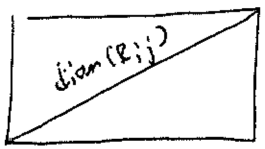
$$\text{area}(R_{ij}) = \Delta(R_{ij}) = \Delta([x_{i-1}, x_i])\,\Delta([y_{j-1}, y_j]) = |x_i - x_{i-1}|\,|y_j - y_{j-1}|.$$

Vast. sen läpimitta, eli halkaisija on

$$\text{diam}(R_{ij}) = \left(\Delta([x_{i-1}, x_i])^2 + \Delta([y_{j-1}, y_j])^2\right)^{1/2},$$

ja jaon $\{R_{ij}\}$ normi on

$$\sup_{i,j} \text{diam}(R_{ij}) = \|R_{ij}\|.$$



Määr. 3.1.1. i) Olk. $f : D \to \mathbb{R}$ raj. f:ään liittyvä Riemann-summa on

$$R(f, \{R_{ij}\}) = \sum_{i,j}' f(\xi_{ij})\,\text{area}(R_{ij}), \quad \xi_{ij} \in R_{ij}.$$

ii) Jos on olemassa jaoista & pisteiden ξ_{ij} valinnasta riippumaton raja-arvo

$$\lim_{\|R_{ij}\| \to 0} R(f, \{R_{ij}\}) = I,$$

sanomme luvun I f:n Riemann-integraaliksi yli suorakaiteen D, ja funktiota f Riemann-integroituvaksi yli D:n, Merk. $I = \int_D f\,dxdy = \int_D f(x,y)\,dxdy$

Peruslause on seuraava:

Lause 3.1.2. Jos $f : D \to \mathbb{R}$ on jva, niin se on Riemann-integroituva yli välin D.

Tod. Kuten Analyysin kurssilla; idea on os. että vastaavat yläsummat

$$S(f, \{R_{ij}\}) = \sum_{i,j} \left(\sup_{\xi \in R_{ij}} f(\xi)\right) \text{area}(R_{ij})$$

ja alasummat

$$s(f,\{R_{ij}\}) = \sum_{i,j} \left(\inf_{\xi \in R_{ij}} f(\xi)\right) \operatorname{area}(R_{ij})$$

ovat m.v. lähellä toisiaan, kun ~~sup~~ $\|R_{ij}\|$ on riittävän pien.

<u>Esim.</u> Olk. $f(x,y) = \alpha \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \alpha \operatorname{area}(D).$$

Tod. Triv.: Kaikilla Riemann-summilla on sama arvo $= \alpha \operatorname{area}(D)$. $\square$

Olkoon $G_t = \{(x,y)\in D;\ g(x,y)\le t\} = g^{-1}(B(0;t))$, ja olet. että joukolle G_t on hyvin määr. pinta-ala

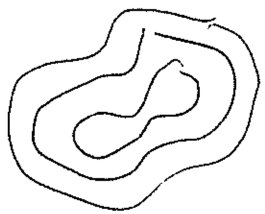
$$A(t) = \text{area}(G_t) := \int_{G_t} dx\,dy,$$

ja että vielä $A\in C^1([a,b])$. Tällöin pätee

<u>Lause 3.5.1.</u> $$\int_D h(g(x,y))\,dx\,dy = \int_a^b h(t)A'(t)\,dt.$$

"Tod" Olk.

$$a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$$



välin $[a,b]$ jako. Tällöin

$$(x,y)\in G_{t_i}\setminus G_{t_{i-1}} \Rightarrow h(g(x,y))\approx h(t_i)$$

(sillä $(x,y)\in G_{t_i}\setminus G_{t_{i-1}} \Leftrightarrow t_{i-1} < g(x,y)\le t_i$)

Nyt

$$\int_D h(g(x,y))\,dx\,dy \approx \sum h(t_i)\overbrace{(A(t_i)-A(t_{i-1}))}^{=\text{area}(G_{t_i}\setminus G_{t_{i-1}})}$$

$$\approx \sum h(t_i)A'(t_i)(t_i-t_{i-1}) \approx \int_a^b h(t)A'(t)\,dt. \quad \text{"}\square\text{"}$$

<u>Esim.</u> i) $D=\bar{B}(0,1)=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1\}$.

Nyt

$$I=\int_D \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy \quad \text{on tätä muotoa}$$

kun

$$g(x,y)=x^2+y^2$$

$$h(t)=\sin t.$$

Nyt

$$A(t)=\text{area}(G_t)=\text{area}\{(x,y);\ x^2+y^2\le t\}$$
$$=\pi t$$
$$A'(t)=\pi,$$

ja

$$\int_D \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 h(t)A'(t)\,dt$$

$$=\int_0^1 \sin t\cdot\pi\,dt = -\pi\Big/_0^1 \cos t = \pi(1-\cos t).$$

~~ii) Lasketaan nimittäin~~

$$\cancel{I=\int_{a^2\le x^2+y^2\le b^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.}$$

3.6. Epäoleelliset integraalit

... Kuten Martion kirjassa.

3.7. Integrointi $\mathbb{R}^n$:ssä, $n \geq 2$.

Olkoon aluksi

$$D = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n], \quad n \geq 2,$$

n-suorakaide $-\infty < a_i < b_i < \infty$. Jos $f \in D \to \mathbb{R}$

on raj, niin

$$\int_D f(x)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \right) \cdots dx_1 \right),$$

mikäli kaikki iteroidut integraalit ovat voimassa.

Esim. jos f on jva, niin kaikki ~~ovat~~ iteroidut integraalit ovat olemassa; ja jos $A \subset \mathbb{R}^n$ ja D on n-suorakaide s.e.

$$A \subset D,$$

niin määritellään kun $f : A \to \mathbb{R}$,

$$\int_A f\, dx_1 \ldots dx_n = \int_D \hat{f}(x) \underbrace{dx_1 \ldots dx_n}_{= dx},$$

jos vasemman puoleinen integraali on olemassa.

Tässä

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \in D \setminus A, \end{cases}$$

on f:n nollajatko D:lle.

Edelleen, jos esim.

$$x' \in A'$$

$$A = \{x = (x_1, \ldots, x_n) ;\ g_1(x') \leq x_1 \leq g_2(x')\}$$

g_1, g_2 jvia $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, niin

$$\int_A f\, dx = \int_{A'} dx' \left(\int_{g_1(x')}^{g_2(x')} f(x_1, x')\, dx_1 \right),$$

ja muuttujan vaihto kaava on voimassa samassa muodossa kun tasossa; nyt

$$\det w'(x) = \det(\partial_i w_j(x)).$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{2}{4}r^4 \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

135

IV GREENIN KAAVAT

4.1. Integrointi käyrien yli

Olkoon $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ käyrä, $I=[a,b]$, $\gamma \in C^1(I)$. Oletetaan että U on $\gamma(I)$:n avoin ymp. ja $f: U \to \mathbb{R}$ jatkuva flt. Haluamme integroida f:n yli γ:n. Tämän voi toteuttaa usealla eri tavalla, ja nyt aluksi määrittelemme integraalin s.o. se ei riipu γ:n suunnistuksesta.

Aloitamme taas Riemannin summalle: jaetaan väli I pisteillä

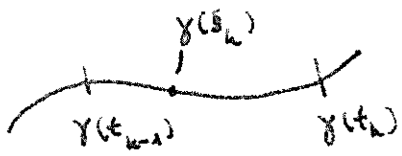
$$a=t_0<t_1<\dots<t_n=b.$$

$$I_k=[t_{k-1},t_k],\quad k=n,\dots,1.$$

Muodostetaan nyt Riemann-summa γ:lla,

$$S_\gamma(f,\{I_k\}) = \sum_k f(\gamma(\xi_k))\,|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|$$

$\xi_k \in I_k$



Määr. 4.1.1 Jos on olemassa raja-arvo (riippumaton pisteiden ξ_k ja välien I_k valinnasta)

$$\lim_{\|I_k\|\to 0} S_\gamma(f,\{I_k\}),$$

sanomme sitä f:n integraaliksi yli γ:n pinta/pituusmitan suhteen; merk.

$$\int_\gamma f(x)\,dS(x)$$

(tai jos kun haluamme korostaa, että tämä on käyrän pit. suhteen $\int_\gamma f(x)\,dl(x)$.)

Kuinka $\int_\gamma f\,dS$ lasketaan käytännössä?

Nyt ~~välianalaase valitaan~~

$$|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})| \sim |\gamma'(t_{k-1})|\,|t_k-t_{k-1}|,$$

eli

$$\left[\, S_\gamma(f,\{I_k\}) \sim \sum_k f(\gamma(t_{k-1}))\,|\gamma'(t_{k-1})|\,|t_k-t_{k-1}| \xrightarrow[\|I_k\|\to 0]{} \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \,\right],$$

eli käyttäen γ:n parametriesitystä,

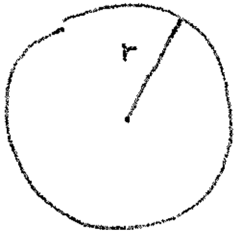
$$\int_\gamma f(x)\,dS(x) = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

Tämä integraali on taas lineaarinen:

$$\int_\gamma (\alpha f+\beta g)\,dS = \alpha\int_\gamma f\,dS + \beta\int_\gamma g\,dS$$

$\forall\ f,g\in C^1(U),\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$

Esim. Olk. $\gamma(t) = re^{it} = r(\cos t, \sin t)$,



$0\le t\le 2\pi$

$\gamma'(t) = r(-\sin t, \cos t)$

$|\gamma'(t)| = r$,

ja siis

$$\int_\gamma f\,dS = r\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt, \text{ eli esim.}$$

$$\int_\gamma x\,dS = r\int_0^{2\pi}\cos t\,dt = 0;$$

Lasketaan vielä, miltä tämä integraali näyttää, jos γ annetaan muodossa

$$\gamma(x) = (x,\varphi(x)),\quad a\le x\le b$$

Nyt $\gamma'(x) = (1,\varphi'(x))$,

$|\gamma'(x)| = \sqrt{1+|\varphi'|^2}$,

eli

$$\int_\gamma f\,dS = \int_a^b f(x,\varphi(x))\,\overbrace{\sqrt{1+|\varphi'(x)|^2}\,dx}^{=dS(x).}$$

Samoin, jos $\gamma: y\longmapsto(\psi(y),y)$, niin

$$\int_\gamma f\,dS = \int_a^b f(\psi(y),y)\sqrt{1+|\psi'(y)|^2}\,dy\ .$$

Huom: Integraalin määritelmä ei riipu γ:n valinnasta: ol. $\left.\begin{array}{l}\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{R}^2\\ \gamma_2:[c,d]\to\mathbb{R}^2\end{array}\right\}$ ovat saman polun/käyrän γ kaksi eri bij. parametrisaatiot, eli

$\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1: [a,b]\to[c,d]$ & määr. &

$\gamma_1^{-1}\circ\gamma_2: [c,d]\to[a,b]$ & deriv.

Nyt ∇_0

$$\int_\gamma f\,dS = \int_a^b f(\gamma_1(t))\,|\gamma_1'(t)|\,dt = \begin{array}{l} t=(\gamma_1^{-1}\circ\gamma_2)(s) \\ dt = \overbrace{(\gamma_1^{-1})'(\gamma_2(s))}^{1/\gamma_1'(t)}\,\gamma_2'(s)\,ds\end{array}$$

$$= \int_c^d f(\gamma_2(s))\,|\gamma_2'(s)|\,dS.\quad \nabla_0$$

7.2. Integraointi pintojen yli

Olkoon nyt

$$\gamma : \overbrace{[a,b]\times[c,d]}^{=D} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , (s,t)\in[a,b]\times[c,d]$$

pinnan parametrisointi, eli γ diff.va, ja $\partial_s\gamma$, $\partial_t\gamma$ lin. riippumattomia.

Olkoon $R_{ij} = [s_{i-1},s_i]\times[t_{i-1},t_i]$ D:n jako pikkusuorakaiteisiin, $\xi_{ij} = (\alpha_i,\beta_j)\in R_{ij}$.

Määr. Riemannin-summa (kun f ja $\gamma(D)$:n ystössä)

$$S_\gamma(f,\{R_{ij}\}) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij})\,\mathrm{area}(R_{ij}).$$

Jos on olemassa raja-arvo

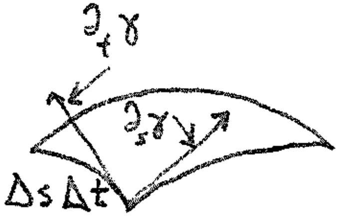
$$\lim_{\|R_{ij}\|\to 0} S_\gamma(f,\{R_{ij}\}), \quad \left(\begin{array}{l}\text{taas ei riipu}\\ \text{jaosta!}\end{array}\right)$$

on se f:n integraali yli pinnan γ:

$$\int_\gamma f\,dS.$$

Kuinka lasketaan $\mathrm{area}(R_{ij})$?

Kuten aikaisemmin,



$$\mathrm{area}(R_{ij}) \sim |\partial_s\gamma\times\partial_t\gamma|\,\Delta s\,\Delta t$$

$$= \left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_s\gamma_1 & \partial_s\gamma_2 & \partial_s\gamma_3 \\ \partial_t\gamma_1 & \partial_t\gamma_2 & \partial_t\gamma_3 \end{vmatrix}\right\| \cdot \Delta s\,\Delta t \Rightarrow \int_\gamma f\,dS = \int_D f(\gamma(s,t))\,|\partial_s\gamma\times\partial_t\gamma|\,ds\,dt$$

Nyt on hyödyllisempää olettaa muuten, että γ:lla on parametriesitys

$$\gamma : (x,y)\longmapsto (x,y,\varphi(x,y)). \quad (x,y)\in D.$$

Tällöin

$$\partial_x\gamma = (1,0,\partial_x\varphi)$$

$$\partial_y\gamma = (0,1,\partial_y\varphi),$$

ja $\mathrm{area}(R_{ij}) \sim \left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \partial_x\varphi \\ 0 & 1 & \partial_y\varphi \end{vmatrix}\right\|$

$$= |(-\partial_x\varphi, -\partial_y\varphi, 1)| = \sqrt{1+|\partial_x\varphi|^2+|\partial_y\varphi|^2}$$

$$= \sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}.$$

Eli

$$S_\gamma(f, \{R_{ij}\}) \sim \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \sqrt{1 + |\nabla\varphi(\xi)|^2}\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

$$\xrightarrow{\|R_{ij}\| \to 0} \int_D f(x, y, \varphi(x,y)) \underbrace{\sqrt{1+|\varphi'(x,y)|^2}\, dx\, dy}.$$

(= "pintamitta/ pinta-alamitta)

Tämä on taas lineaarinen:

$$\alpha \int_\gamma f\, dS + \beta \int_\gamma g\, dS = \int_\gamma (\alpha f + \beta g)\, dS,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vakioita, f, g jvia.

Lasketaan pintamitta pallolla:

olk. $x^2+y^2+z^2 = 1$, eli $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Ol. $z > 0$, eli

$$\varphi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

$$\partial_x \varphi = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \partial_y \varphi = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$|\nabla\varphi|^2 = \frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2} \Rightarrow \boxed{\cancel{dS = \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy}}.$$

$$1+|\nabla\varphi|^2 = \frac{1}{1-x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow dS = \frac{dx\, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Voimme myös käyttää napakoordinaatteja:

$$\gamma(\varphi, \theta) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

$$\partial_\varphi \gamma = r(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\partial_\theta \gamma = r(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$|\partial_\varphi\gamma \times \partial_\theta\gamma| = \left| \begin{matrix} i & j & k \\ & \cdots & \end{matrix} \right|$$

$$= r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

4.3. Divergenssilause

(n=2,3)

Olkoon nyt U pisteen $x_0 \in \partial\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, ympäristö s.e. ehto

$$x_1 = \psi(x'), \quad x' = (x_2, \dots, x_n)$$

määrää joukon $U \cap \partial\Omega$, ja

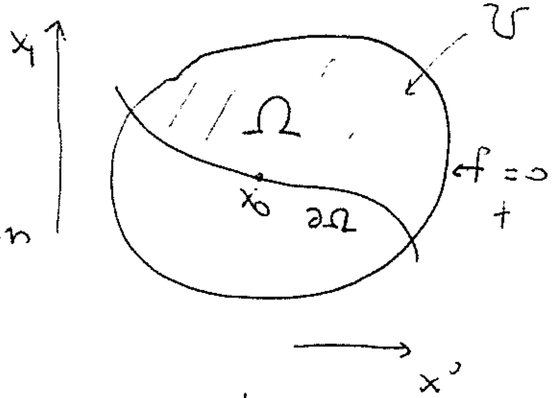
$$x_1 > \psi(x'), \text{ kun } x \in U \cap \Omega\text{:n}, \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$$

Olkoon $f \in C^1(U)$

s.e. $f|_{\partial\Omega} = 0$, ja

että itseasiassa $f = 0$ ∂U:n

jossain ympäristössä.



(Voit valita U:n vaikka sopivaksi suorakaiteeksi jos haluat).

Lasketaan nyt integraalin $\int_\Omega \partial f/\partial x_j \, dx$.

$\left(= \int_U \widetilde{\partial f/\partial x_j} \, dx \right)$; ongelmat ovat $\partial\Omega$:lla!

Olkoon $h \in C^1(\mathbb{R}^t)$-apufunktio,

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

Nyt huomataan: $\forall \ x = (x_1, x') \in U$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} h\left(\frac{x_1 - \psi(x')}{\varepsilon} \right) = \begin{cases} 0, & x_1 < \psi(x') \\ 1, & x_1 > \psi(x'), \end{cases}$$

eli

$$\lim_{\varepsilon \to +0} h\left(\frac{x_1 - \psi(x')}{\varepsilon} \right) = \chi_\Omega(x), \quad x \in U,$$

ja voimme kirjoittaa

$$\left| \ \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \right.$$

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \int_U \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \chi_\Omega \, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_U \frac{\partial f}{\partial x_j} h\left(\frac{x_1 - \psi(x')}{\varepsilon} \right) dx.$$

Ol. nyt että U on suorakaide $= I_1 \times \dots \times I_n$.

Tällöin $f|_{\partial U} = 0$, joten integroimalla osittain j-muuttujan suhteen saamme

146

$$\int_{I_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, h\left(\frac{x_1-\psi(x')}{\varepsilon}\right) dx_j = -\int_{I_j} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(h\left(\frac{x_1-\psi(x')}{\varepsilon}\right)\right) dx_j$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\int_{I_j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(x_1-\psi(x'))\right] h'\left(\frac{x_1-\psi(x')}{\varepsilon}\right) f(x)\, dx_j ,$$

Nyt $\partial\Omega$:n määrää ehto $x_1-\psi(x')=0$, eli jos $g(x)=x_1-\psi(x')$, on

$\nabla g = (1,-\nabla\psi(x'))$ $\partial\Omega$:n normaali

$\vec{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = (1,-\nabla\psi(x'))/\sqrt{1+|\nabla\psi|^2}$ sen yksikkö-ulkonormaali

Siis

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_1-\psi(x')) = n_j(x')\sqrt{1+|\nabla\psi(x')|^2},$$

ja saamme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{-1}{\varepsilon}\int_U n_j(x')\, h'\left(\frac{x_1-\psi(x')}{\varepsilon}\right)\sqrt{1+|\nabla\psi(x')|^2} \times f(x_1,x')\, dx$$

147

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{U\cap\{x_1=0\}}\left(\int_{I_1}\frac{-1}{\varepsilon}h'\left(\frac{x_1-\psi(x')}{\varepsilon}\right) f(x_1,x')\,dx_1\right)\times$$

$$\times\, n_j(x')\sqrt{1+|\nabla\psi(x')|^2}\,dx'$$

os.int

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} -\left(\int_{\{x_1=0\}}\left(\int h\left(\frac{x_1-\psi(x')}{\varepsilon}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x')\,dx_1\right)\times n_j(x')\sqrt{1+|\nabla\psi(x')|^2}\,dx'\right)$$

$$= \cancel{\lim} -\int_{\{x_1=0\}}\left(\int_{\psi(x')}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x')\,dx_1\right) n_j(x')\sqrt{1+|\nabla\psi(x')|^2}\,dx'$$

$=$ | $U' = U\cap\{x_1=0\}$

$$= \int_{U'} f(\psi(x'),x')\, n_j(x')\overbrace{\sqrt{1+|\nabla\psi(x')|^2}\,dx'}^{=dS(x)}$$

(melkein)

Olemme siis ∇ osoittaneet?

Lause 4.3.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (paloittain) C^1-alue, $n = \vec{n} = (\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_d)$ sen yksikkö ulkonormaali. Tällöin

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} n_j f \, dS \quad (f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar\Omega))$$
$\square$

Tällä on tärkeä seuraus:

Olkoon $F = (F_1, \ldots, F_d)$ C^1-alueessa Ω määritelty <u>C^1-vektorikenttä</u>, eli $F_i(x): \Omega \to \mathbb{R}$ on joh. $i \in \{1, \ldots, d\}$ $C^1(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ funktio.

Tällöin pätee

<u>Teor. 4.3.2.</u> (Divergenssi-teoreema)

$$\int_\Omega \nabla \cdot F \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle n, F \rangle dS ;$$

Tässä

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_d}{\partial x_d}$$

on vektorikentän F <u>divergenssi</u>.

<u>Tod.</u> Nyt

$$\int_\Omega \nabla \cdot F \, dx = \sum_{k=1}^d \int_\Omega \frac{\partial F_k}{\partial x_k} dx \overset{\text{Lause 4.3.1.}}{=} \sum_{k=1}^d \int_{\partial\Omega} n_k F_k \, dS$$

$$= \int_{\partial\Omega} \langle n, F \rangle dS . \ \square$$

Palataan tämän fysikaaliseen tulkintaan hieman myöhemmin. Saamme myös seuraavan d-ulotteisen os. integrointikaavan:

<u>Lause 4.3.2.</u> Ol. n, Ω kuten edellä ja $f, g \in C^1(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$. Tällöin

$$\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} n_j f g \, dS - \int_\Omega g \frac{\partial f}{\partial x_j} dx .$$

Tod. Olkoon $h = fg$. Nyt

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = f \frac{\partial g}{\partial x_j} + g \frac{\partial f}{\partial x_j} ,$$

eli integroimalla puolittain yli Ω:n saamme

$$\int_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_j} + g\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx = \int_\Omega \frac{\partial h}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial\Omega} n_j h\,dS$$

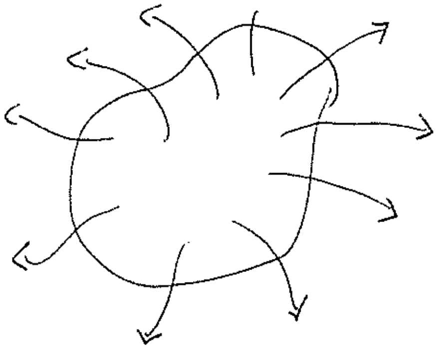
$$= \int_{\partial\Omega} n_j f g\,dS.$$

Väite seuraa tästä siirtämällä $\int_\Omega g\frac{\partial f}{\partial x_j}dx$ oikealle puolelle. □

Fysikaalinen motivointi: Olkoon F vektorikenttä Ω:ssa. Integraali

$$\int_{\partial\Omega}\langle n, F\rangle\,dS$$

on vektorikentän F vuo (suljetun) pinnan $\partial\Omega$ läpi



Voit ajatella että F:ää sähkövirtana tai nestevirtauksena. Jos virtauksella ei ole Ω:ssa lähteitä eikä "nieluja", ja virta ei häviä (energia säilyy & ei olen. muut.)

paikkoja, joissa virtaus häviää

niin "kaikki mitä tulee sisään" = "kaikki mitä virtaa ulos", eli vuo pinnan $\partial\Omega$ läpi $= 0$:

$$\int_{\partial\Omega}\langle n, F\rangle\,dS = 0.$$

Jos lähteitä & nieluja ei ole missään Ω:n osa-alueessakaan, niin

C^1-ala.

$$\int_{\partial U}\langle n, F\rangle\,dS = 0 \quad \forall\ U \subset\subset \Omega$$

Siis

$$\int_U \nabla\cdot F\,dx = \int_{\partial U}\langle n, F\rangle\,dS = 0 \quad \forall\ U\subset\subset\Omega$$

Fjn $\Rightarrow$ $\boxed{\nabla\cdot F = 0 \ \ \Omega\text{:ssa}}$ eli $\left\{\right.$ F on lähteetön vektorikenttä