Vektorianalyysi, 2. kurssikoe ma 12.12.2011
Ratkaisut ja arvostelukommentit (5 sivua): Jouni Luukkainen (arvostelu valmis to 12.1.2012)
Tämä tiedote on ilmoitustaululla ja kurssin kotisivulla.
Arvostelija selittää pyydettäessä korvaavan 2. kurssikokeen 19.12.2011 (6 osallistujaa) ratkaisut.

Tehtävä 1. *Määritä funktion* $f(x,y) = (x-y)^2$ *suurin ja pienin arvo suljetussa kiekossa* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4\}$ *sekä ne pisteet, joissa nämä ääriarvot saavutetaan.*

Ratkaisu ja pisteiden kertyminen.

(i) Alkuperustelu, jota ei (tällä kertaa) vaadittu. Joukko $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4\} = \overline{B}(\mathbf{0},2)$ on suljettu ja rajoitettu eli täten kompakti, ja funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva, joten sen rajoittumalla $f|D$ on suurin arvo ja pienin arvo; kohdat, joissa ne saavutetaan, ovat tietysti funktion $f|D$ lokaaleja ääriarvokohtia.

(ii) Sisusta. Havaitaan, että f on C^1-funktio. Etsitään ensin lokaalit ääriarvokohdat avoimessa kiekossa $D_0 = B(\mathbf{0},2)$, jolla $\overline{D}_0 = D$. Nyt $\nabla f(x,y) = (2(x-y), 2(y-x))$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Rajoittuman $f|D_0$ lokaalit ääriarvokohdat ovat sen kriittisissä pisteissä eli pisteissä $(x,y) \in D_0$, joissa $\nabla f(x,y) = (0,0)$ eli $x = y$ (**1p**). Nyt $f(x,x) = (x-x)^2 = 0^2 = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (**2p**).

Tässä vaiheessa voitaisiin tehdä seuraava tarkastelu, mutta se ei ole välttämätöntä. Koska $f(x,y) > 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, joilla $x \ne y$, niin funktion f pienin arvo kiekossa D on 0, ja se saavutetaan täsmälleen D:n halkaisijan $y = x$ pisteissä; tämä halkaisija on joukko $\{(t,t) \mid -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\}$, koska $t^2+t^2 \le 4 \Leftrightarrow 2t^2 \le 4 \Leftrightarrow t^2 \le 2 \Leftrightarrow |t| \le \sqrt{2}$.

(iii) Reuna. Sitten on etsittävä rajoittuman $f|\partial D$ lokaalit ääriarvokohdat, sillä jos $f|D$ saavuttaa suurimman arvonsa tai pienimmän arvonsa jossain tietyssä reunan $\partial D = \partial D_0 = S(\mathbf{0},2)$ pisteessä, kyseinen piste on tietysti myös funktion $f|\partial D$ lokaali ääriarvokohta. Havaitaan, että $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^2-4$, on C^1-funktio, jolla $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$. Lisäksi $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$, joten $\nabla g(x,y) \ne \mathbf{0}$ kaikilla $(x,y) \in \partial D$. Täten voidaan käyttää Lagrangen kertoimia. Jos siis funktiolla $f|\partial D$ on lokaali ääriarvo kohdassa $(x,y) \in \partial D$, niin on olemassa $\lambda \in \mathbb{R}$, jolla $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$. Ratkaistaan sitten kullakin $\lambda \in \mathbb{R}$ näin saatu yhtälöryhmä:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) = 2\lambda x \\ 2(y-x) = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} (\mathbf{3p}) \
\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(x+y) = 0 \\ \lambda(x-y) = 2(x-y) \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = -y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} 0 \ne \lambda \ne 2 \\ y = x = -y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ (x,y) = \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} \lambda = 2 \\ (x,y) = \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \end{cases} (\mathbf{5p}),
\end{aligned}$$

jossa toisen ekvivalenssin molemmissa suunnissa laskettiin yhteen ja vähennettiin toisistaan kaksi ensimmäistä yhtälöä ja jossa viimeinen ekvivalenssi perustui siihen, että $y = x = -y \Leftrightarrow x = y = 0$. Ratkaisupisteissä (x,y) on $f(x,y) = (x-y)^2 = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2 = \lambda^2(\pm\sqrt{2})^2 = 2\lambda^2$, joten $f(x,y) = 0$, kun $\lambda = 0$, ja $f(x,y) = 8$, kun $\lambda = 2$.

(iv) Johtopäätös. Näin ollen $f|D$:n suurin arvo on $\max\{0,8\} = 8$ ja pienin arvo taas $\min\{0,8\} = 0$. Suurin arvo saavutetaan täsmälleen pisteissä $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ja $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ja pienin arvo taas täsmälleen pisteissä (t,t), joilla $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ (**6p**).

Huom. Tietystikään ei olisi tarvinnut määrittää λ:n kelpoisia arvoja $\lambda = 0$ ja $\lambda = 2$. Sakkoa ei mennyt sen toteamatta jättämisestä, että f ja g ovat C^1-funktioita, mitä tarvittiin Lagrangen kertoimien menetelmän toimivuuteen. Vaadittiin vain pelkät laskut; tällöin kyllä piti siis osoittaa, että reunalla on $\nabla g(x,y) \ne \mathbf{0}$ (muuten yhtälöryhmän muodostamisesta ei saanut 1p). Tapaus $\lambda = 0$ vastaa f:n kriittistä pistettä, jotka oikeastaan koko tason osalta löydettiin jo alussa, joten tapauksen käsittelemättä jättämisestä ei mennyt sakkoa.

Muita ratkaisutapoja, joista joitain, vaan ei kaikkia, oli yritetty:

Eliminointi kertomalla. Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä $x - y = \lambda x$ ja $y - x = \lambda y$ saadaan (y:llä tai x:llä kertomalla), että $xy - y^2 = \lambda xy = xy - x^2$ ja siis $y^2 = x^2$ eli $y = \pm x$, jolloin yhtälön $x^2 + y^2 = 4$ tähden on $|x| = |y| = \sqrt{2}$. Jos $y = x$, niin $\lambda x = 0 = \lambda y$, joten $\lambda = 0$, sillä $(x, y) \neq (0, 0)$; kääntäen, jos $\lambda = 0$, niin $x = y$. Jos taas $y = -x$, niin $\lambda x = 2x$ ja $\lambda y = 2y$, joten $\lambda = 2$; kääntäen, jos $\lambda = 2$, niin $x - y = 2x$ ja $y - x = 2y$ eli siis $y = -x$.

Eliminointi jakamalla. Jos haluaa ratkaista ensimmäisestä yhtälöstä x:llä jakamalla λ:n, on ensin osoitettava, että $x \neq 0$; ja näin on, sillä jos olisi $x = 0$, niin ensimmäisen yhtälön tähden olisi myös $y = 0$ vastoin kolmatta yhtälöä. Tämän sijasta jotkut huomasivat, että jos $x = 0$, niin kolmannen yhtälön tähden on $y = \pm 2$ ja että $f(0, \pm 2) = 4$; siitä, että ensimmäinen ja toinen yhtälö eivät nyt toteudu, ei mennyt sakkoa. Kelvollinen tapa oli myös todeta, että jos $x = 0$, niin $y = 0 = x$ ja $f(0, 0) = 0$. Kysymyksen kokonaan ohittamisesta sakotettiin 1p.

Napakoordinaattien avulla. Kuvauksen w: $[0, \infty[\times \mathbb{R}$, $(r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ kautta ilmaistuna on $D = w[[0, 2] \times \mathbb{R}] = w[[0, 2] \times [0, 2\pi[\,]$ ja

$$(f \circ w)(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = (r \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 = r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi) = r^2(1 - \sin 2\varphi).$$

Täten $f|D$:n suurin arvo on $2^2(1 - (-1)) = 8$, ja se saavutetaan pisteissä $w(2, \varphi)$, joilla $\sin 2\varphi = -1 \Leftrightarrow 2\varphi = 3\pi/2 + 2n\pi \Leftrightarrow \varphi = 3\pi/4 + n\pi$ eli siis pisteissä $2(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ja $2(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Edelleen $f|D$:n pienin arvo on $r^2(1 - 1) = 0$, ja se saavutetaan pisteissä $w(r, \varphi)$, joilla $0 \leq r \leq 2$ ja $\sin 2\varphi = 1 \Leftrightarrow 2\varphi = \pi/2 + 2n\pi \Leftrightarrow \varphi = \pi/4 + n\pi$ eli siis pisteissä $(x, y) = (t, t)$, joilla $|t| \leq \sqrt{2}$.

Reunakäyrän parametrisoinnin avulla. Tehtävän voi ratkaista myös käyttämällä kiekon D sisustassa f:n gradienttia ja kiekon D reunalla reunan parametrisointia $\varphi \mapsto (2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi)$. Reunalle voi käyttää myös parametrisointeja $\gamma_\pm(t) = (t, \pm\sqrt{4 - t^2})$ $\forall t \in [-2, 2]$.

Yksinkertaisin arvioin. Pätee siis, että $f(x, y) = (x - y)^2 \geq 0$ aina ja että $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Toisaalta $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 \leq 2(x^2 + y^2) \leq 2 \cdot 4 = 8$ kaikilla $(x, y) \in D$, sillä kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on $0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|x||y|$ ja siis $-2xy \leq 2|x||y| \leq x^2 + y^2$; lisäksi näiden epäyhtälöiden yhtäsuuruustapauksia tarkastelemalla nähdään, että pisteelle $(x, y) \in D$ on $f(x, y) = 8 \Leftrightarrow xy \leq 0$ ja $|x| = |y|$ ja $x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x, y) = \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Pääakselimuunnoksella. Olkoon (u, v) koordinaatisto, joka saadaan kiertämällä koordinaattiakselit kulman $\pi/4$ verran; siis $u = (x + y)/\sqrt{2}$ ja $v = (-x + y)/\sqrt{2}$. Tässä koordinaatistossa ilmaistuna D on kiekko $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 4\}$ ja f on kuvaus $(u, v) \mapsto 2v^2$, jolloin nähdään, että f:n suurin arvo on 8 ja se saavutetaan pisteissä $(u, v) = (0, \pm 2)$ eli $(x, y) = \pm(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ja että f:n pienin arvo on 0 ja se saavutetaan pisteissä, joissa $v = 0$ ja $|u| \leq 2$ eli joissa $x = y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Tehtävä 2. *Määritä se (tai ne) yksikkökiekon $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ sisään piirretyt koordinaattiakselien suuntaiset suorakaiteet, joilla on suurin mahdollinen pinta-ala. Mikä tämä pinta-ala on?*

Ratkaisu ja pisteiden kertyminen. Termi "sisäänpiirretty" tarkoittaa, että neliön kärjet ovat ympyrällä.

Kaaren napakulmalla parametrisoinnin avulla. Kaari $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ on polun γ: $[0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi)$, kuva. Sen yksikköympyrän sisäänpiirretyn koordinaattiakselien suuntaisen suorakaiteen, jonka yksi kärki on $\gamma(\varphi)$, pinta-ala on $h(\varphi) = 4 \cos \varphi \sin \varphi = 2(2 \sin \varphi \cos \varphi) = 2 \sin 2\varphi$. Funktion h suurin arvo välillä $[0, \pi/2]$ on 2, ja se saavutetaan pisteessä φ, jossa $\sin 2\varphi = 1$ eli $2\varphi = \pi/2 + 2n\pi$ (vain $n = 0$ käy) eli $\varphi = \pi/4$. Tällöin suorakaide on *neliö*. *Vaihtoehtoisesti derivoimalla:* Koska $h'(\varphi) = 4(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$, niin $h'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pi/4$ ja h' on vähenevä, joten $h'(\varphi) > 0$, kun $0 \leq \varphi < \pi/4$, sekä $h'(\varphi) < 0$, kun $\pi/4 < \varphi \leq \pi/2$; näin ollen kohdassa $\varphi = \pi/4$ (vastaten neliötä) ja vain siinä on h:lla suurin arvo, joka on $h(\pi/4) = 2$. Sakkoa meni **2p**, jos ei perustellut, miksi h':n nollakohta antaa suurimman arvon.

Kaaren muuttujalla x parametrisoinnin avulla. Suorakulmioiden, joiden kärjet ovat $(\pm x, \pm\sqrt{1 - x^2})$, kun $0 \leq x \leq 1$, pinta-alafunktiolla h: $[0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x\sqrt{1 - x^2} = 4\sqrt{x^2 - x^4} = 4\sqrt{1/4 - (x^2 - 1/2)^2}$ on suurin arvo täsmälleen kohdassa $x = 1/\sqrt{2}$, joka vastaa neliötä, ja tämä arvo on $h(1/\sqrt{2}) = 4\sqrt{1/4} = 2$. *Vaihtoehtoisesti derivoimalla:* Koska $h'(x) = 4(1 - 2x^2)/\sqrt{1 - x^2}$, kun $0 \leq x < 1$, ja siis $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/\sqrt{2}$, ja koska h on jatkuva välin päätepisteissä, niin h:lla on suurin arvo $\max\{h(1/\sqrt{2}), h(0), h(1)\} = \max\{2, 0, 0\} = 2$ vastaten neliötä. Sakkoa meni **2p**, jos etsi vain h':n nollakohdan ja h:n arvon siinä.

Lagrangen kertoimin. Kyseiset suorakaiteet (surkastuneet tapaukset mukaan lukien) ovat ne, joiden kärjet ovat $(\pm x, \pm y)$ pisteelle (x, y) joukossa $A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, ja suorakaiteen pinta-ala on tällöin $4xy$. Joukko A_0 on kompakti ja funktio $f_0\colon A_0 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 4xy$, jatkuva, joten f_0:lla on suurin arvo, ja f_0 saavuttaa tämän joukossa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\}$, sillä $f_0(0, 1) = f_0(1, 0) = 0$ ja $f_0(x, y) > 0$ kaikilla $(x, y) \in A$ (**2p**).

Tarkastellaan C^1-funktioita $f\colon U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 4xy$, ja $g\colon U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$, avoimessa joukossa $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$, jolloin $A = \{(x, y) \in U \mid g(x, y) = 0\}$. (*Huomaa, että koska A ei ole kompakti, niin f_0:n tarkastelu yllä todella tarvittiin.*) Nyt $\nabla f(x, y) = (4y, 4x)$ $\forall (x, y) \in U$ ja $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ $\forall (x, y) \in U$, joten $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ $\forall (x, y) \in A$ (tämän ohittamisesta sakkoa **1p**). Täten pisteessä $(x, y) \in A$, jossa f_0:lla on suurin arvo ja siis funktiolla $f|A = f_0|A$ lokaali ääriarvo, on olemassa $\lambda \in \mathbb{R}$, jolla $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$. Saadulla sidotulla ääriarvotehtävällä on tasan yksi ratkaisu:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = \lambda 2x \\ 4x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} (\mathbf{3p}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = \lambda x \\ 4x = \lambda^2 x \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = y > 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = y = \sqrt{2}/2 \ (\mathbf{5p}). \end{cases}$$

Täten f_0 saavuttaa suurimman arvonsa tasan yhdessä pisteessä $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, ja se on $f_0(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = 4(\sqrt{2}/2)^2 = 2$. Siis suurin pinta-ala, 2, on *neliöllä* (**6p**). **Jälkikäteishuomio**, että $f(x, y) \to 0 < 2$, kun $A \ni (x, y) \to (0, 1)$ tai $(1, 0)$, korvaisi alun f_0-tarkastelun.

Lagrangen kertoimin koko ympyrällä, *jolloin meillä on sekä kompaktius että derivoituvuus.* Tarkastellaan C^1-funktioita $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 4xy$, ja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$, jolloin joukko $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ on koko yksikköympyrä ja $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ $\forall (x, y) \in S$. Täten tapauksessa $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ on $f(x, y)$ sen suorakaiteen pinta-ala, jonka kärjet ovat $(\pm x, \pm y)$, mutta ei rajoiteta vielä x:n ja y:n merkkejä. Koska S on nyt kompakti, niin funktiolla $f|S$ on suurin arvo. Muodostetaan sidottu ääriarvotehtävä, jolloin saadaan neljä ratkaisua:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = \lambda 2x \\ 4x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \neq y \\ y/x = \lambda/2 = x/y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2y/x \\ x^2 = y^2 = 1/2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = y = \pm\sqrt{2}/2 \end{cases} \text{tai} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = -y = \pm\sqrt{2}/2. \end{cases}$$

Nyt $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = 2 = f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ ja $f(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -2 = f(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, joten $f|S$:n suurin arvo on 2. Pinta-alafunktion $f|\{(x, y) \in S \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ suurin arvo on siis 2 ja se saavutetaan täsmälleen neliön tapauksessa $(x, y) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Yksinkertaisin arvioin. Pisteelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, jolla $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$, on $4xy = 2(2xy)\,(= 2(x^2 + y^2 - (x - y)^2)) \leq 2(x^2 + y^2) = 2$, jolloin $x = y = \sqrt{2}/2$ (neliö) $\Leftrightarrow 4xy = 2$ (suurin pinta-ala).

Tehtävä 3. *Olkoon* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4\}$. *Laske integraali* $\int_D (x^2 + y^2)^2 \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

Ratkaisu ja pisteiden kertyminen.

(i) Alkutarkastelu, jota ei vaadittu, mutta josta saattoi saada hyvitystä kohtaan (ii). Suljettu kiekko $D = \overline{B}(\mathbf{0}, 2)$ on kompakti, sen reuna $\partial D = S(\mathbf{0}, 2)$ on nollajoukko ja funktio $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 \sin(x^2 + y^2)$, on jatkuva, joten tasointegraali $I = \int_D f = \int_D f(x, y)\, dx\, dy$ on olemassa. Siirrytään napakoordinaatteihin (r, φ). Kuvaus $w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, on jatkuvasti derivoituva ja sen Jacobin determinantti on

$$\tau(w)(r, \varphi) = \det w'(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r \quad \forall (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

Suorakaide $R = [0,2] \times [0,2\pi]$ on kompakti, sen reuna ∂R on nollajoukko ja kuvaus $(f \circ w)|\tau(w)|\colon R \to \mathbb{R}$ on jatkuva, joten integraali $J = \int_R (f \circ w)|\tau(w)|$ on olemassa. Lisäksi joukot $D_0 = D \setminus (\partial D \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2\})$ (keskipisteeseen asti aukileikattu avoin kiekko) ja $R_0 =]0,2[\times]0,2\pi[$ ovat avoimia, ∂D_0 ja $\partial R_0 = \partial R$ ovat nollajoukkoja ja $\overline{D}_0 = D$ sekä $\overline{R}_0 = R$, joten on olemassa integraalit $I_0 = \int_{D_0} f$ ja $J_0 = \int_{R_0} (f \circ w)|\tau(w)|$ ja pätee, että $I = I_0$ sekä $J = J_0$. Toisaalta w määrittelee bijektion $R_0 \to D_0$. Näin ollen $I_0 = J_0$. Kaikkiaan siis $I = J$.

(ii) Integraalin laskeminen. Nyt

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 \sin(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) = (r^2)^2\sin(r^2) = r^4\sin(r^2) \quad \forall (r,\varphi) \in R.$$

Näin ollen

$$I = J = \int_R r^4 \sin(r^2)\, r\, dr\, d\varphi = \int_{[0,2]\times[0,2\pi]} r^5 \sin(r^2)\, dr\, d\varphi \ (\mathbf{2p}).$$

(Tekijää $|\tau(w)(r,\varphi)| = r$ eli muunnoksen w pisteittäistä pinta-alan muunnossuhdetta ei siis saanut unohtaa!) Lasketaan saatu tasointegraali iteroituna integraalina ottaen huomioon, että integroitava riippuu vain r:stä, jolloin sisempi r-integraali on vakio φ:n suhteen ja voidaan siis siirtää φ-integraalin eteen:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r^5 \sin(r^2)\, dr \right) d\varphi = \left(\int_0^2 r^5 \sin(r^2)\, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = 2\pi \int_0^2 r^5 \sin(r^2)\, dr \ (\mathbf{3p}).$$

Sijoitus $s(r) = r^2$, jolloin $ds = 2r\, dr$, $s(0) = 0$ ja $s(2) = 4$, ja osittaisintegrointi kahdesti antaa tästä

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi \int_0^4 \frac{1}{2} s^2 \sin s\, ds = 2\pi \Big/_0^4 \frac{1}{2} s^2(-\cos s) - 2\pi \int_0^4 s(-\cos s)\, ds = -16\pi\cos 4 + 2\pi \int_0^4 s\cos s\, ds \\
&= -16\pi\cos 4 + 2\pi \Big/_0^4 s\sin s - 2\pi \int_0^4 \sin s\, ds = -16\pi\cos 4 + 8\pi\sin 4 + 2\pi \Big/_0^4 \cos s \\
&= -16\pi\cos 4 + 8\pi\sin 4 + 2\pi\cos 4 - 2\pi = 8\pi\sin 4 - 14\pi\cos 4 - 2\pi.
\end{aligned}$$

Lasketaan sama myös tekemättä ensin sijoitusta; osittaisintegrointien määrä ei muutu:

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi \int_0^2 \frac{1}{2} r^4 (2r\sin(r^2))\, dr = 2\pi \Big/_0^2 \frac{1}{2} r^4(-\cos(r^2)) - 2\pi \int_0^2 2r^3(-\cos(r^2))\, dr \ (\mathbf{4p}) \\
&= -16\pi\cos 4 + 2\pi \int_0^2 r^2(2r\cos(r^2))\, dr = -16\pi\cos 4 + 2\pi \Big/_0^2 r^2\sin(r^2) - 2\pi \int_0^2 2r\sin(r^2)\, dr \ (\mathbf{5p}) \\
&= -16\pi\cos 4 + 8\pi\sin 4 + 2\pi \Big/_0^2 \cos(r^2) = -16\pi\cos 4 + 8\pi\sin 4 + 2\pi\cos 4 - 2\pi \\
&= 8\pi\sin 4 - 14\pi\cos 4 - 2\pi \ (\mathbf{6p}).
\end{aligned}$$

Huom. Tasointegraalin palauttaminen yhdeksi yhden muuttujan integraaliksi toi siis nopeasti 3p, mutta tämän integraalin laskemisen virheet arvosteltiin sitten ankarammin. Erityisesti polynomitekijän integrointi trigonometrisen tekijän sijaan vei heti metsään, koska tavoitteenahan oli alentaa polynomin aste nollaan derivointien kautta. Osittaisintegrointikaavan $\int uv' = uv - \int u'v$ ja heti tarvitun integrointikaavan $\int \sin = -\cos$ miinusmerkkien kanssa tuli olla erityisen huolellinen; sulkumerkit olisivat voineet siinä auttaa.

Integrointi vaihtoehtoisesti tasa-arvokäyrien avulla. Kuvaus $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$, on jatkuvasti derivoituva ja $gD = [0,4]$. Olkoon $G_t = \{(x,y) \in D \mid g(x,y) \le t\} = \overline{B}(\mathbf{0}, \sqrt{t})$, kun $t \in [0,4]$, jolloin $A(t) = \operatorname{area}(G_t) = \pi(\sqrt{t})^2 = \pi t \ \forall t \in [0,4]$. Nyt $A\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva ja

$A'(t) = \pi\ \forall t \in [0,4]$. Olkoon $h(t) = t^2 \sin t$, kun $t \in [0,4]$. Tällöin $h\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 \sin(x^2+y^2) = h(g(x,y))\ \forall (x,y) \in D$. Näin ollen

$$I = \int_D f = \int_D h(g(x,y))\,dx\,dy = \int_0^4 h(t)A'(t)\,dt = \int_0^4 t^2 \sin t\,\pi\,dt = \pi \int_0^4 t^2 \sin t\,dt\ (\mathbf{3p}),$$

eli sama integraali kuin (ii):ssä sijoituksen jälkeen.

Tehtävä 4. *Olkoon γ tason käyrä $\gamma(t) = (t, t^3/3)$, $0 \le t \le 1$. Laske integraali $\int_\gamma y\,dl$.*

Ratkaisu ja pisteiden kertyminen. Kyseessä on jatkuvan funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y$, rajoittuman $f|\gamma[0,1]$ integraali jatkuvasti derivoituvan injektiivisen polun $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, jolla $\gamma'(t) = (1,t^2) \neq (0,0)$, kun $0 \le t \le 1$ ($\mathbf{1p}$), kuvakaaren $\gamma[0,1] = \{\gamma(t) \mid t \in [0,1]\} = \{(t, \frac{1}{3}t^3) \mid 0 \le t \le 1\}$ yli tämän kaarenpituuden suhteen. Nyt $|\gamma'(t)| = \sqrt{1^2 + (t^2)^2} = \sqrt{1+t^4}$, kun $0 \le t \le 1$ ($\mathbf{2p}$). Täten

$$\begin{aligned}\int_\gamma y\,dl &= \int_\gamma f\,dl = \int_0^1 f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt = \int_0^1 \frac{1}{3}t^3\sqrt{1+t^4}\,dt\ (\mathbf{3p}) \\ &= \frac{1}{12}\int_0^1 4t^3\sqrt{1+t^4}\,dt\ (\mathbf{4p}) = \frac{1}{12}\Big/_0^1 \frac{2}{3}(1+t^4)^{3/2}\ (\mathbf{5p}) = \frac{2\sqrt{2}-1}{18}\ (\mathbf{6p}).\end{aligned}$$

(Vain yksi teki sijoituksen $s(t) = 1+t^4$, jolla $s(0) = 1$, $s(1) = 2$ ja $ds = s'(t)\,dt = 4t^3\,dt$ sekä täten $\int_\gamma y\,dl = (1/12)\int_1^2 \sqrt{s}\,ds$.)

Huom. Kaari $\gamma[0,1]$ on myös funktion $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$, kuvaaja, ja $\int_\gamma y\,dl = \int_0^1 \varphi(x)\sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx$.