Vektorianalyysi

Harjoitus 7

1.

$$v(t) = (\cos(t), \cos(t^2)), \quad t > 0.$$

Tangentin suunta parametrin arvolla t on $v'(t) = (-\sin(t), -\sin(t^2)\cdot 2t)$

$$= -(\sin(t), 2t\sin(t^2)).$$

Ja pisteessä $t = \pi/2$ saamme

$$v'(t) = -(\sin(\pi/2), 2\cdot\tfrac{\pi}{2}\sin(\tfrac{\pi^2}{4})) = -(1, \pi\sin(\tfrac{\pi^2}{4})).$$

Tangentin yhtälö on (pisteessä $v(t)$)

$$\begin{pmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \end{pmatrix} = v(t) + \lambda v'(t) \quad ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ja tässä tapauksessa saamme

$$\begin{pmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\pi^2/4) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ \pi\sin(\pi^2/4) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(\lambda) = -\lambda \\ x_2(\lambda) = \cos(\pi^2/4) + \lambda\pi\sin(\pi^2/4) \end{cases}$$

siis eliminointi antaa

$$\underline{x_2 = \cos(\pi^2/4) - x_1\pi\sin(\pi^2/4)}.$$

2. $v : [0, 2] \to \mathbb{R}^2, \quad v(t) = (\cos(t), \sin(t)).$

$v'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ ja $\underline{v''(t)} = (-\cos(t), -\sin(t))$

$$= \underline{-v(t)}.$$

ja $v(t)\cdot v'(t) = \cos(t)\cdot(-\sin(t)) + \sin(t)\cdot\cos(t)$

$= 0$. Eli $v(t)$ ja $v'(t)$ ovat kohtisuorassa.

2

3.

$r : [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ polku ja $r''(t) = (0,0,-1)$

Siis $r''(t) = (r_1''(t), r_2''(t), r_3''(t)) = (0,0,-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1'(t) = a_1 \\ r_2'(t) = a_2 \\ r_3'(t) = -t + a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1(t) = a_1 t + b_1 \\ r_2(t) = a_2 t + b_2 \\ r_3(t) = -\frac{t^2}{2} + a_3 t + b_3 \end{cases}$$

$$r(0) = (0,0,2) \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = 2 \end{cases}$$

$$r'(0) = (1,1,0) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$. Väinollen

$r(t) = \left(t, t, -\frac{t^2}{2} + 2\right), \quad t > 0.$

Polku leikkaa xy-tason, kun $z = 0$, eli kun $r_3(t) = 0$.

Eli kun $-\frac{t^2}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = (\pm) 2$

ja siis pisteessä $((t=2))$ $\underline{(2,2,0)}$.

4.

Pinta $r(x,y) = (x, y, f(x,y))$; $f \in C^1(D)$.

Kuten Martio kpl. 3.2. (s. 78) todetaan pinnan $r(x,y) = (r_1(x,y), r_2(x,y), r_3(x,y))$ normaali (kun $r_i \in C^1(D)$) pisteessä (x,y) on

$$\partial_1 r(x,y) \times \partial_2 r(x,y) .$$

Tässä tehtävässä $\partial_1 r(x,y) = (1, 0, f_x(x,y))$ ja $\partial_2 r(x,y) = (0, 1, f_y(x,y))$. Joten

$$\partial_1 r \times \partial_2 r = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(0 \cdot f_y - 1 \cdot f_x) - \bar{j}(1 \cdot f_y - 0 \cdot f_x) + \bar{k}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0)$$
$$= (-f_x, -f_y, 1)$$. Eli normaali on $(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$

Kun $f(x,y) = xy + x$, saamme normaaliksi $(-(y+1), -x, 1)$ tai $(y+1, x, -1)$.

Pinnan pisteeseen $r(x,y)$ asetettu tangenttitaso koostuu niistä pisteistä $\bar{x}$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ jotka toteuttavat

$$(\bar{x} - r(x,y)) \cdot (\partial_1 r(x,y) \times \partial_2 r(x,y)) = 0 .$$

Tässä tapauksessa siis ne (x_1, x_2, x_3) jotka toteuttavat:

$$((x_1, x_2, x_3) - (x, y, xy+x)) \cdot (y+1, x, -1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x_1 - x, x_2 - y, x_3 - (xy+x)) \cdot (y+1, x, -1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x_1 - x)(y+1) + (x_2 - y)x + (x_3 - xy - x)\cdot(-1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{x_1(y+1) + x_2 x - x_3} = x(y+1) + yx - xy - x$$
$$= \underline{xy} \, .$$

5.

$f(x,y) = (x^2 - y^2)/2$. Nyt

$$\partial_1 r(x,y) = (1, 0, f_x(x,y)) = (1, 0, x) \quad \text{ja}$$
$$\partial_2 r(x,y) = (0, 1, f_y(x,y)) = (0, 1, -y). \quad \text{Joten}$$

$$\partial_1 r \times \partial_2 r = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -y \end{vmatrix}$$

$$= (0\cdot(-y) - 1\cdot x, -(1\cdot(-y) - 0\cdot x), 1\cdot 1 - 0\cdot 0)$$
$$= (-x, y, 1).$$

Näin ollen pisteeseen $(x, y, f(x,y))$ asetetun tangenttitason yhtälö on ne (x_1, x_2, x_3) jotka toteuttavat:

$$((x_1, x_2, x_3) - (x, y, (x^2-y^2)/2))\cdot(-x, y, 1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x_1 - x, x_2 - y, x_3 - (x^2-y^2)/2)\cdot(-x, y, 1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x_1 - x)\cdot(-x) + (x_2 - y)\cdot y + (x_3 - (x^2 - y^2)/2)\cdot 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \underline{-x_1 x + x_2 y + x_3} = -x^2 + y^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$
$$= \underline{-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}} \, .$$

6.

$f(x,y) = e^{x/y}$. ~~Nyt~~

$\partial_1 r(x,y) = (1, 0, f_x(x,y)) = (1, 0, \frac{1}{y} e^{x/y})$ ja
$\partial_2 r(x,y) = (0, 1, f_y(x,y)) = (0, 1, -\frac{x}{y^2} e^{x/y})$. Joten

$$\partial_1 r \times \partial_2 r = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & \frac{1}{y} e^{x/y} \\ 0 & 1 & -\frac{x}{y^2} e^{x/y} \end{vmatrix}$$

$$= \left(0 - 1 \cdot \frac{1}{y} e^{x/y}, -\left(1 \cdot \frac{(-x)}{y^2} e^{x/y} - 0\right), 1 - 0\right)$$

$= \left(-\frac{1}{y} e^{x/y}, \frac{x}{y^2} e^{x/y}, 1\right)$ ja erityisesti pisteessä $(2, 1, e^2)$ normaali on siis

$(-e^2, 2e^2, 1)$. Ja edelleen pisteeseen $(2, 1, e^2)$ asetettu tangenttitaso on

$$((x_1, x_2, x_3) - (2, 1, e^2)) \cdot (-e^2, 2e^2, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2, x_2 - 1, x_3 - e^2) \cdot (-e^2, 2e^2, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x_1 - 2) e^2 + (x_2 - 1) 2e^2 + (x_3 - e^2) \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{-x_1 e^2 + x_2 2e^2 + x_3} = -2e^2 + 2e^2 + e^2 = \underline{e^2}.$$