Vektorianalyysi

Harjoitus 3

1. $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^{\|x\|}$.

Siis $x = (x_1, x_2)$ ja $f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}^{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$

$$e^{\ln\{\sqrt{x_1^2+x_2^2}^{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\}} = \exp\left[\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\ln\{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\}\right].$$

Joten

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \exp\left[\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\ln\{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\}\right] \cdot \left\{ \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \cdot 2x_1 \ln\{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\} + \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \cdot \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \cdot 2x_1 \right\}$$

$$= \|x\|^{\|x\|} \cdot \left\{ \frac{1}{\|x\|} \cdot x_1 \cdot \ln\|x\| + \frac{1}{\|x\|} \cdot x_1 \right\}$$

$$= \|x\|^{\|x\|} \cdot \frac{x_1}{\|x\|} \cdot \{\ln\|x\| + 1\}.$$ Aivan samalla tavalla saamme, että $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \|x\|^{\|x\|} \cdot \frac{x_2}{\|x\|}\{\ln\|x\| + 1\}$.

Näinollen $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \|x\|^{\|x\|} \cdot \frac{1}{\|x\|}\{\ln\|x\|+1\}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$= \|x\|^{\|x\|} \cdot \frac{1}{\|x\|}\{\ln\|x\|+1\}\, x.$$

Huom! f on differentioituva $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:ssa, sillä se on yhdiste differentioituvista funktioista; exp-funktio, ln-funktio, $\sqrt{\ }$-funktio ja $x \mapsto x_1^2 + x_2^2$ -funktio.

2. Merk. $h = (h_1, h_2)$

(0) $f(0+h) - f(0) = \frac{h_1^3}{\|h\|} - 0 = \frac{h_1^3}{\|h\|}$.

Ratkaisun löytämiseksi (yleisemmin tapauksessa) voimme tutkia ensin osittaisderivaattoja (jos emme suoraan näe tuloksesta ym. lausekkeesta). Siis

$$\frac{f(0+(h_1,0)) - f(0)}{h_1} = \frac{\frac{h_1^3}{h_1} - 0}{h_1} = \frac{h_1^3}{h_1^2} = h_1 \xrightarrow[h_1 \to 0]{} 0$$

eli $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{0}) = 0$ ja

$$\frac{f(0+(0,h_2)) - f(0)}{h_2} = \frac{0-0}{h_2} = 0, \text{ eli } \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{0}) = 0.$$

Siis $\nabla f(\bar{0}) = \bar{0}$. Muokataan lauseketta (0) nyt hieman

$$f(0+h) - f(0) = \frac{h_1^3}{\|h\|} = \|h\| \frac{h_1^3}{\|h\|^2}$$ ja

pitäisi siis olla $\varepsilon(h) = \frac{h_1^3}{\|h\|^2}$. Mutta koska $(h_1^2)^3 \le (h_1^2 + h_2^2)^3$

$\iff |h_1^3| \le \sqrt{(h_1^2+h_2^2)^3} = \|h\|^3$, niin saamme

$$\left|\frac{h_1^3}{\|h\|^2}\right| \le \frac{\|h\|^3}{\|h\|^2} = \|h\| \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$$

eli ym. $\varepsilon(h) \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$. Joten f on differentioituva origossa.

3. (Vrt. Lyhyempi II tapa seuraavalla sivulla)

Todistetaan tätä tehtävää varten 2 muuttujan väliarvolause.

Olkoon $a=(a_1,a_2)$ ja $b=(b_1,b_2)$ 2 pistettä ja J niitä yhdistävä jana. Kuvaus

$$g(t) = (1-t)\,a + t\,b$$

määrittelee differentioituvan bijektion $I \to J$, missä $I = \{ t \mid 0 \le t \le 1 \}$.

Nyt kuvaus $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ on differentioituva (2 differentioituvan kuvauksen yhdiste). Yhden muuttujan VAL:n mukaan

$$(f\circ g)(1) - (f\circ g)(0) = (f\circ g)'(\tau)$$

missä $\tau \in (0,1)$. Lisäksi $g_i'(t) = b_i - a_i$, $i = 1,2$. Joten ketjusäännön avulla

$$(f\circ g)'(\tau) = D_1 f(g(\tau))(b_1 - a_1) + D_2 f(g(\tau))(b_2 - a_2).$$

Koska $(f\circ g)(1) - (f\circ g)(0) = f(b) - f(a)$ saadaan haluttu tulos:

$$(3\text{-}1)\quad f(b) - f(a) = D_1 f(p)(b_1 - a_1) + D_2 f(p)(b_2 - a_2)$$

missä p on janan J sisäpiste.

Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^2$. Koska $\nabla f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^2$, saamme (3-1):n nojalla

$$f(b) - f(a) = 0\cdot(b_1 - a_1) + 0\cdot(b_2 - a_2) = 0.$$

Ja koska tämä on voimassa kaikilla $a, b \in \mathbb{R}^2$, niin funktio f on vakio.

3a

3. (II tapa)

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Oletusten nojalla $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$

Olkoon L_1 x_1-akselin suuntainen suora. Yhden muuttujan differentiaalilaskennasta seuraa, että $f(x) \equiv$ vakio suoralla L_1, sillä $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ suoralla L_1.

Eli tarkemmin: Suoralla L_1 on voimassa $x_2 = c$ = vakio, joten funktio f riippuu vain x_1-koordinaatista eli on olemassa funktio $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e. $h(x_1) := f(x_1, c)$ suoralla L_1 ja sovellamme ym. yhden muuttujan differentiaalilaskentaa funktioon h.

Näin ollen saamme, että jokaisella suoralla $L_a: x_2 = a$ funktio f on vakio.

Olkoon $L_1: x_2 = a_1$ ja $L_2: x_2 = a_2$ ja $f \equiv \tilde{a}_1$ L_1:ssä ja $f \equiv \tilde{a}_2$ L_2:ssa.

Valitaan x_2-akselin suuntainen suora L_0. Tällöin koska $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ suoralla L_0, saamme kuten yllä että f on vakio suoralla L_0.

Lisäksi L_0 leikkaa suorat L_1 ja L_a, joten täytyy olla $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$.

Näin ollen jokaisella x_1-akselin suuntaisella suoralla on sama vakio arvo; eli $f \equiv$ vakio $\mathbb{R}^2$:ssa.

4.

$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja f differentioituva. Nyt

Merkitään $h = -k$.

$f(-x+h) - f(-x)$

$= f(-x-k) - f(-x)$

$= f(-(x+k)) - f(-x) = f(x+k) - f(x)$

$= \langle \nabla f(x), k \rangle + \|k\| \, \varepsilon(x; k)$

$= \langle \nabla f(x), -h \rangle + \|-h\| \, \varepsilon(x; -h)$

$= -\langle \nabla f(x), h \rangle + \|h\| \, \varepsilon(x; -h)$

$= \langle -\nabla f(x), h \rangle + \|h\| \, \varepsilon(x; -h)$ ja $\varepsilon(x; -h) \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$,

sillä $\varepsilon(x; k) \xrightarrow[\|k\| \to 0]{} 0$ ja $\|h\| \to 0 \Leftrightarrow \|k\| \to 0$.

Näinollen $\nabla f(-x) = -\nabla f(x)$.
Koska tämä on voimassa $\forall x \in \mathbb{R}^n$, niin valitaan $x = 0$:
$\nabla f(-0) = -\nabla f(0) \Leftrightarrow \nabla f(0) = -\nabla f(0)$
$\Leftrightarrow 2 \nabla f(0) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(0) = 0$.

5. (Vrt. Luennot kpl. 2.6)

$f(x) = (e^{x_2}, x_1 x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Nyt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja

$$f'(x) = \begin{pmatrix} D_{x_1} f_1 & D_{x_2} f_1 \\ D_{x_1} f_2 & D_{x_2} f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{x_2} \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \quad \text{ja}$$

$$f'(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tässä siis $f_1(x_1, x_2) = e^{x_2}$ ja $f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

6.

f on differentioituva x:ssä, jos on olemassa lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja funktio $\mathcal{E}(x;h) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s.e. $\mathcal{E}(x;h) \to 0$, kun $\|h\| \to 0$ ja

(6-1) $$f(x+h) - f(x) = L(x)h + \|h\| \mathcal{E}(x;h).$$

Komponenttifunktio f_i on differentioituva x:ssä, jos on olemassa lineaarikuvaus $L_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja funktio $\mathcal{E}_i(x;h) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s.e. $\mathcal{E}_i(x;h) \to 0$, kun $\|h\| \to 0$ ja

(6-2) $$f_i(x+h) - f_i(x) = L_i(x)h + \|h\| \mathcal{E}_i(x;h).$$

"$\Rightarrow$" Oletamme, että f on differentioituva. Siis (6-1) on voimassa ja luentojen kpl. 2.6 nojalla tiedämme, että

$$L = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{pmatrix}.$$

Merkitään

$$\mathcal{E}(x;h) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(x;h) \\ \mathcal{E}_2(x;h) \end{pmatrix} \quad \text{ja}$$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Kertomalla matriisi auki saamme yhtälöt (6-2) $(i = 1,2)$, missä $L_1 = (D_1 f_1 \;\; D_2 f_1)$ ja $L_2 = (D_1 f_2 \;\; D_2 f_2)$ ja $\delta_i = \varepsilon_i$. Nyt

$\varepsilon_i(x;h) \to 0$ kun $\|h\| \to 0$.

Siis f_i ovat differentioituvia.

"$\Leftarrow$" Oletamme siis että f_i ovat differentioituvia. Nyt Luentojen kpl. 2.4. nojalla tiedämme että $L_i = (D_1 f_i \;\; D_2 f_i)$. Kokoamalla (6-2) $(i = 1,2)$ vektorimuotoon saamme yhtälön (6-1), missä nyt

$$L = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{pmatrix} \text{ ja } \varepsilon(x;h) = \begin{pmatrix} \delta_1(x;h) \\ \delta_2(x;h) \end{pmatrix}.$$

Nyt $\varepsilon(x;h) \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$, sillä $\delta_i(x;h) \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$.

Näinollen f on differentioituva.