Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi
Malliratkaisut 6 (Mikko Kemppainen)
31.10.-4.11.2011

Määritä seuraavien kolmen funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kriittiset pisteet, ja mahdollisten lokaalien ääriarvokohtien laatu.

1. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
   Ratkaisu:
   Laskemalla gradientti
   $$\nabla f(x_1, x_2) = (1, 1), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$
   nähdään, ettei funktiolla f ole kriittisiä pisteitä, eikä siten ääriarvokohtia.

2. $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2)$
   Ratkaisu:
   Lasketaan ensin gradientti:
   $$\nabla f(x_1, x_2) = (\cos(x_1 + x_2), \cos(x_1 + x_2)), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$
   Nyt (x_1, x_2) on f:n kriittinen piste, mikäli $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)$, ts.
   $$\begin{aligned} & (\cos(x_1 + x_2), \cos(x_1 + x_2)) = (0, 0) \\ \iff & \cos(x_1 + x_2) = 0 \\ \iff & x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{jollakin } k \in \mathbb{Z} \\ \iff & x_2 = -x_1 + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{jollakin } k \in \mathbb{Z} \\ \iff & (x_1, x_2) = (s, -s + \frac{\pi}{2} + k\pi) \quad \text{joillakin } s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$
   Koska $\partial_1 f = \partial_2 f$, niin myös $\partial_1\partial_1 f = \partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_2 f$. Kaikilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on siten voimassa $\det \nabla^2 f(x_1, x_2) = 0$, jolloin Hessen matriisi $\nabla^2 f(x_1, x_2)$ on semidefiniitti, eikä mahdollisista ääriarvoista voida päätellä sen avulla mitään.

   Kuitenkin, kaikilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ pätee sinifunktion perusominaisuuksien nojalla $-1 \leq f(x_1, x_2) \leq 1$ ja lisäksi kriittisissä pisteissä (x_1, x_2) on voimassa
   $$f(x_1, x_2) = f(s, -s + \frac{\pi}{2} + k\pi) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \begin{cases} 1, & \text{parillisilla } k \in \mathbb{Z}, \\ -1, & \text{parittomilla } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
   Edelleen, tarkasteltaessa funktion f arvoja kriittisen pisteen $(x_1, x_2) = (s, -s + \pi/2 + k\pi)$ kautta kulkevaa polkua $\alpha(t) = (x_1 + t, x_2 - t)$ pitkin nähdään, että kaikilla $t \in \mathbb{R}$ on voimassa
   $$(f \circ \alpha)(t) = f(s + t, -(s + t) + \frac{\pi}{2} + k\pi) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \begin{cases} 1, & \text{parillisilla } k \in \mathbb{Z}, \\ -1, & \text{parittomilla } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
   Kriittinen piste $(x_1, x_2) = (s, -s + \pi/2 + k\pi)$ on siis (epäaito) maksimikohta, kun $s \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{Z}$ on parillinen, ja (epäaito) minimikohta, kun $s \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{Z}$ on pariton.

3. $f(x_1, x_2) = \sin^2(x_1 + x_2)$
   Ratkaisu:

Määrätään funktion f kriittiset pisteet laskemalla sen gradientin nollakohdat:

$$\begin{aligned}
&\nabla f(x_1,x_2) = (2\sin(x_1+x_2)\cos(x_1+x_2), 2\sin(x_1+x_2)\cos(x_1+x_2)) = (0,0)\\
\iff& \sin(x_1+x_2)\cos(x_1+x_2) = 0\\
\iff& \sin(x_1+x_2) = 0 \quad \text{tai} \quad \cos(x_1+x_2) = 0\\
\iff& x_2 = -x_1 + k\pi \quad \text{jollakin } k\in\mathbb{Z} \quad \text{tai} \quad x_2 = -x_1 + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{jollakin } k\in\mathbb{Z}\\
\iff& (x_1,x_2) = (s, -s + \frac{k\pi}{2}) \quad \text{joillakin } s\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Jälleen, koska ensimmäiset osittaisderivaatat ovat samat, on Hessen matriisi semidefiniitti, eikä sen avulla voida päätellä mitään mahdollisista ääriarvoista. Funktion f määritelmästä nähdään kuitenkin suoraan, että $0 \le f(x_1,x_2) \le 1$ kaikilla $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. Lisäksi kriittisissä pisteisstä (x_1,x_2) on voimassa

$$f(x_1,x_2) = f(s, -s+\frac{k\pi}{2}) = \sin^2(\frac{k\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & \text{parillisilla } k\in\mathbb{Z},\\ 1, & \text{parittomilla } k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Kuten edellisessä tehtävässä, tarkasteltaessa funktion f arvoja kriittisen pisteen $(x_1,x_2) = (s, -s+k\pi/2)$ kautta kulkevaa polkua $\alpha(t) = (x_1+t, x_2-t)$ pitkin nähdään, että kaikilla $t\in\mathbb{R}$ on voimassa

$$(f\circ\alpha)(t) = f(s+t, -(s+t)+\frac{k\pi}{2}) = \sin(\frac{k\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & \text{parillisilla } k\in\mathbb{Z},\\ 1, & \text{parittomilla } k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Kriittinen piste $(x_1,x_2) = (s, -s+\pi/2+k\pi)$ on siis (epäaito) minimikohta, kun $s\in\mathbb{R}$ ja $k\in\mathbb{Z}$ on parillinen, ja (epäaito) maksimikohta, kun $s\in\mathbb{R}$ ja $k\in\mathbb{Z}$ on pariton.

4. Määritä funktion

$$g(x_1,x_2) = e^{x_1^2+x_2^2} - \lambda(x_1^2+x_2^2)$$

kriittiset pisteet ja mahdolliset lokaalit ääriarvot reaalisen vakion λ eri arvoilla.
Ratkaisu:
Huomataan, että funktio g voidaan esittää muodossa

$$g(x) = h(\|x\|^2), \quad x = (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

missä $h : [0,\infty)\to\mathbb{R}$ on määritelty kaavalla

$$h(r) = e^r - \lambda r, \quad r\ge 0.$$

Nyt $h'(r) = e^r - \lambda$, eli h':lla on nollakohta vain kun $\lambda\ge 1$, ja tällöin $h'(r) = 0 \iff r = \log\lambda$. Funktion g gradientti voidaan nyt laskea ketjusäännön avulla:

$$\nabla g(x) = 2h'(\|x\|^2)x, \quad x\in\mathbb{R}^2.$$

Jos $\lambda\le 1$, on funktiolla g vain yksi kriittinen piste $x = 0$. Jos taas $\lambda > 1$, ovat kriittisiä pisteitä lisäksi kaikki ne $x\in\mathbb{R}^2$, joilla $\|x\| = \sqrt{\log\lambda}$. Mahdollisia ääriarvoja ovat siis $g(0) = 1$ ja $h(\log\lambda) = \lambda(1-\log\lambda)$, kun $\lambda > 1$.

Tapauksessa $\lambda\le 1$ kriittinen piste $x = 0$ on aito minimikohta, sillä tällöin $h'(r) > 0$ kaikilla $r > 0$, eli h on aidosti kasvava.

Tapauksessa $\lambda > 1$ kriittinen piste $x = 0$ on aito maksimikohta, sillä tällöin $h'(r) < 0$ kaikilla $r\in[0,\log\lambda)$, eli h on aidosti vähenevä lähellä nollaa. Kriittiset pisteet $x\in\mathbb{R}^2$, joilla $\|x\| = \log\lambda$, ovat puolestaan aitoja minimejä, sillä $h''(r) = e^r > 0$ kaikilla $r\in[0,\infty)$.

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1^2} + e^{x_2^2} - (x_1 - x_2)^2.$$

Määrää funktion f kriittiset pisteet, mahdolliset lokaalit ääriarvot ja niiden laatu.
Ratkaisu:
Määrätään ensin funktion f kriittiset pisteet selvittämällä milloin sen gradientti on nolla:

$$\begin{aligned} &\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 e^{x_1^2} - 2(x_1 - x_2), 2x_2 e^{x_2^2} + 2(x_1 - x_2)) = (0, 0) \\ \iff &\begin{cases} 2x_1 e^{x_1^2} - 2(x_1 - x_2) = 0 \\ 2x_2 e^{x_2^2} + 2(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Laskemalla puolittain yhteen yllä olevat yhtälöt saadaan $x_1 e^{x_1^2} = -x_2 e^{x_2^2}$ ja siten on oltava $x_1 = -x_2$ (funktio $t \mapsto te^{t^2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on injektio). Sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön saadaan $2x_1(e^{x_1^2} - 2) = 0$, josta edelleen $x_1 = 0$ tai $x_1 = \pm\sqrt{\log 2}$. Funktion f kriittiset pisteet ovat siten $(0, 0)$, $(\sqrt{\log 2}, -\sqrt{\log 2})$ ja $(-\sqrt{\log 2}, \sqrt{\log 2})$.

Funktion f Hessen matriisiksi saamme

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2e^{x_1^2} + 4x_1^2 e^{x_1^2} - 2 & 2 \\ 2 & 2e^{x_2^2} + 4x_2^2 e^{x_2^2} - 2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Nyt

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

joten $\det \nabla^2 f(0, 0) = -4 < 0$ eli $(0, 0)$ funktion f satulapiste.

Edelleen

$$\nabla^2 f(\sqrt{\log 2}, -\sqrt{\log 2}) = \begin{pmatrix} 2 + 8\log 2 & 2 \\ 2 & 2 + 8\log 2 \end{pmatrix},$$

joten $\det \nabla^2 f(\sqrt{\log 2}, -\sqrt{\log 2}) > 0$. Koska lisäksi $\partial_1 \partial_1 f(\sqrt{\log 2}, -\sqrt{\log 2}) = 2 + 8\log 2 > 0$, on piste $(\sqrt{\log 2}, -\sqrt{\log 2})$ funktion f lokaali minimikohta.

Vastaavasti $\nabla^2 f(-\sqrt{\log 2}, \sqrt{\log 2}) = \nabla^2 f(\sqrt{\log 2}, -\sqrt{\log 2})$, joten myös piste $(-\sqrt{\log 2}, \sqrt{\log 2})$ on funktion f lokaali minimikohta.

6. Olkoon $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x_1, x_2) = (4 - x_1^2 - x_2^2)e^{x_1 - x_2}.$$

Määrää funktion h kriittiset pisteet, mahdolliset lokaalit ääriarvot ja niiden laatu.
Ratkaisu:
Määrätään funktion h kriittiset pisteet etsimällä sen gradientin nollakohdat:

$$\begin{aligned} \nabla h(x_1, x_2) &= (-2x_1 e^{x_1 - x_2} + (4 - x_1^2 - x_2^2)e^{x_1 - x_2}, -2x_2 e^{x_1 - x_2} - (4 - x_1^2 - x_2^2)e^{x_1 - x_2}) \\ &= (0, 0) \\ \iff &\begin{cases} -2x_1 + 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ -2x_2 - 4 + x_1^2 + x_2^2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Laskemalla saadut yhtälöt puolittain yhteen saamme yhtälön $x_2 = -x_1$, joka edelleen sijoitettuna ylempään yhtälöön antaa sievennyksen jälkeen

$$x_1^2 + x_1 - 2 = 0 \iff x_1 = 1 \quad \text{tai} \quad x_1 = -2.$$

Funktion h kriittiset pisteet ovat siten $(1, -1)$ ja $(-2, 2)$.

Hessen matriisiksi saamme

$$\nabla^2 h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} (2 - 4x_1 - x_1^2 - x_2^2)e^{x_1 - x_2} & (-4 + 2x_1 - 2x_2 + x_1^2 + x_2^2)e^{x_1 - x_2} \\ (-4 + 2x_1 - 2x_2 + x_1^2 + x_2^2)e^{x_1 - x_2} & (2 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2)e^{x_1 - x_2} \end{pmatrix},$$

kaikilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Nyt

$$\nabla^2 h(1, -1) = \begin{pmatrix} -4e^2 & 2e^2 \\ 2e^2 & -4e^2 \end{pmatrix},$$

joten $\det \nabla^2 h(1, -1) = 12e^4 > 0$. Koska lisäksi $\partial_1 \partial_1 h(1, -1) = -4e^2 < 0$, on piste $(1, -1)$ funktion h lokaali maksimikohta.

Edelleen

$$\nabla^2 h(-2, 2) = \begin{pmatrix} 2e^{-4} & -4e^{-4} \\ -4e^{-4} & 2e^{-4} \end{pmatrix},$$

joten $\det \nabla^2 h(-2, 2) = -12e^{-8} < 0$ eli $(-2, 2)$ on funktion h satulapiste.