Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi
Malliratkaisut 10 (Mikko Kemppainen)
28.11.-2.12.2011

Käytämme sijoitusmerkintää

$$\Big[f(x,y)\Big]_{x=a}^{x=b} = f(b,y) - f(a,y).$$

1. Olkoon $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Määritä integraali

$$\int_D \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ratkaisu:
Olkoon $g(x,y) = x^2 + y^2$, jolloin $D = g^{-1}([1/4, 4])$. Asetetaan lisäksi $h(t) = \ln t$ ja $A(t) = \mathrm{area}\{(x,y) : g(x,y) \leq t\} = \pi t$, jolloin Lauseen 3.5.1 nojalla

$$\int_D \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D h(g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{1/4}^4 h(t)A'(t)\,\mathrm{d}t = \pi\int_{1/4}^4 \ln t\,\mathrm{d}t$$
$$= \pi\Big(\Big[t\ln t\Big]_{t=1/4}^{t=4} - \int_{1/4}^4 \mathrm{d}t\Big) = \pi\Big(4\ln 4 - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{4} - \frac{15}{4}\Big) = \pi\frac{17\ln 4 - 15}{4}.$$

2. Olkoon $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Määritä integraali

$$\int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ratkaisu:
I tapa:
Hyödynnämme tilanteen symmetrisyyttä asettamalla

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0\},$$

jolloin $D \cup E = g^{-1}([0,4])$, missä $g(x,y) = x^2 + y^2$. Kirjoitetaan edelleen $h(t) = t$ ja $A(t) = \mathrm{area}\{(x,y) : g(x,y) \leq t\} = \pi t$, jolloin Lauseen 3.5.1 nojalla

$$\int_{D\cup E} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{D\cup E} h(g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 h(t)A'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \pi\int_0^4 t\,\mathrm{d}t = \pi\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_{t=0}^{t=4} = 8\pi.$$

Koska $g(x,y) = g(x,-y)$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ näemme, että

$$\int_E g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_E g(x,-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Joukkojen D ja E ollessa oleellisesti pistevieraita pätee siten

$$\int_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{D\cup E} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\pi.$$

II tapa:
Siirtymällä napakoordinaatteihin $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ huomaamme D:n vastaavan joukkoa $\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, jolloin saamme

$$\int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2\int_0^\pi (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \pi\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r = 4\pi.$$

3. Olkoon $A_t = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : t^2 \leq x^2+y^2 \leq k^2t^2\}$, missä $t > 0$ ja $k > 1$. Osoita, että integraalin

$$\int_{A_t} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

arvo ei riipu t:stä.
Todistus:
I tapa:
On ilmeistä, että A_t on symmetrinen siten, että $(x, y) \in A_t$ täsmälleen silloin, kun $(y, x) \in A_t$. Siispä

$$\int_{A_t} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{A_t} \frac{y^2}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Koska lisäksi

$$\int_{A_t} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{A_t} \frac{\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - \int_{A_t} \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

niin

$$\int_{A_t} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_{A_t} \frac{\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

Asetetaan nyt $g(x, y) = x^2 + y^2$, $h(s) = 1/s$ ja $B(s) = \text{area}\{(x, y) : g(x, y) \leq s\} = \pi s$, jolloin $A_t = g^{-1}([t^2, k^2t^2])$ ja Lauseen 3.5.1 nojalla

$$\begin{aligned}\int_{A_t} \frac{\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} &= \int_{A_t} h(g(x, y)) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \pi \int_{t^2}^{k^2t^2} h(s) \,\mathrm{d}s \\ &= \pi \int_{t^2}^{k^2t^2} \frac{\mathrm{d}s}{s} = \pi\Big(\ln(k^2t^2) - \ln(t^2)\Big) = 2\pi \ln k.\end{aligned}$$

II tapa:
Siirtymällä napakoordinaatteihin $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ huomaamme D:n vastaavan joukkoa $\{(r, \theta) : t \leq r \leq kt, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, jolloin saamme

$$\int_{A_t} \frac{\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_t^{kt} \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^4} r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r = \int_t^{kt} \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r = C(\ln(kt) - \ln t) = C\ln k,$$

kun merkitsemme

$$C = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta.$$

4. Olkoon D joukko, jota rajoittavat x-akseli ja suorat $x = 1$ ja $y = x$. Määritä integraali

$$\int_D x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Ratkaisu:
Nyt

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, x \in [0, 1]\}$$

ja siten

$$\int_D x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_0^x x \,\mathrm{d}y\Big) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[xy\Big]_{y=0}^{y=x} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

5. Olkoon $f(x,y) = \max(x,y)$, ja $D = [0,1]^2$ tason yksikköneliö. Määritä integraali

$$\int_D f^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Ratkaisu:
Kirjoitetaan D oleellisesti pistevieraana yhdisteenä $D = D_1 \cup D_2$, missä

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, x \in [0,1]\} \quad \text{ja} \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y, y \in [0,1]\},$$

jolloin

$$\int_D f^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{D_1} f^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{D_2} f^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Koska

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{kun } (x,y) \in D_1, \\ y, & \text{kun } (x,y) \in D_2, \end{cases}$$

on voimassa

$$\int_{D_1} f^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{D_1} x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \quad \text{ja} \quad \int_{D_2} f^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{D_1} y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Edelleen

$$\int_{D_1} x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_0^x x^2 \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[x^2 y \Big]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

ja vastaavasti

$$\int_{D_2} y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$$

Siispä

$$\int_D f^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

6. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{x^2 y^2}.$$

Ratkaisu:
Integraalin perusominaisuuksien nojalla

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{x^2 y^2} = \int_1^\infty \frac{1}{y^2} \Big(\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \Big) \, \mathrm{d}y = \Big(\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \Big) \Big(\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^2} \Big).$$

Koska

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x} \Big]_{x=1}^{x=\infty} = 1,$$

niin

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{x^2 y^2} = 1.$$